





BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET

ASTRONOMIQUES.

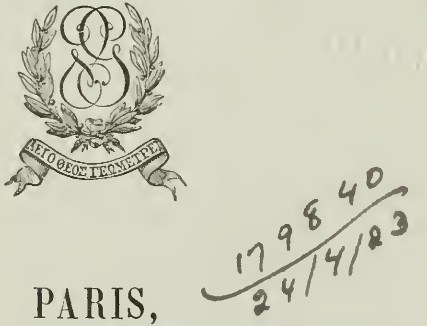
PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,
Quai des Augustins, 55.

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN
DES
SCIENCES MATHÉMATIQUES
ET
ASTRONOMIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL,
AVEC LA COLLABORATION
DE MM. ANDRÉ, LESPIAULT, PAINVIN ET RADAU,
SOUS LA DIRECTION DE LA COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

TOME VII. — 2e SEMESTRE DE 1874.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1874

COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

MM. CHASLES, *président*.

BERTRAND.

PUISEUX.

SERRET.

N....

LISTE DES COLLABORATEURS DU BULLETIN

PENDANT LES TROIS PREMIÈRES ANNÉES.

MM. Baillaud, agrégé de l'Université.
Battaglini, professeur à l'Université de Rome.
Beltrami, professeur à l'Université de Bologne.
Bertrand (J.), membre de l'Institut.
Bonnet (O.), membre de l'Institut.
Bouquet, professeur à la Faculté des Sciences de Paris.
Clebsch, professeur à l'Université de Goettingue.
De Tilly, capitaine d'Artillerie, à Bruxelles.
Dewulf, commandant du Génie aux îles d'Hyères.
Ermakof, à Kazan.
Hermite, membre de l'Institut.
Imschenetsky, professeur à l'Université de Kharkof.
Klein, professeur à l'Université d'Erlangen.
Laguerre, répétiteur à l'École Polytechnique.
Lampe, professeur à Berlin.
Laurent (H.), répétiteur à l'École Polytechnique.
Lie, professeur à l'Université de Christiania.
Lindelöf, professeur à l'Université de Helsingfors.
Lipschitz, professeur à l'Université de Bonn.
Mannheim, professeur à l'École Polytechnique.
Padova, professeur à Pise.
Pellet, professeur au Lycée de Bourg.
Potocki, licencié ès Sciences, à Bordeaux.
Resal, membre de l'Institut.
Serret (J.-A.), membre de l'Institut.
Simon (Ch.), professeur au Lycée Louis-le-Grand.
Tisserand, directeur de l'Observatoire de Toulouse.
Zeuthen, professeur à l'Université de Copenhague.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET

ASTRONOMIQUES.

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

HOÜEL (J.). — Cours de Calcul infinitésimal, professé à la Faculté des Sciences de Bordeaux. *Seconde Partie.* Cours autographié ; 335 p., in-4°. — Paris, Gauthier-Villars ; 1872.

Dans l'analyse de la première Partie [1], nous avons déjà indiqué dans quel esprit cet Ouvrage était conçu et énuméré les qualités qui le distinguaient. L'auteur s'est écarté, en beaucoup de points, des voies généralement suivies : ainsi il a supprimé la distinction trop tranchée qu'on établit entre le Calcul différentiel et le Calcul intégral ; indépendamment de l'avantage qu'on obtient par là pour les applications pratiques, la disposition des matières adoptées par l'auteur peut se justifier au point de vue logique. M. Hoüel attache avec raison une très-grande importance aux premières notions sur les infiniment petits ; on a remarqué qu'il veut établir les principes avec rigueur et prévenir, autant que possible, les difficultés qui peuvent naître dans l'étude des infiniment petits ; la lecture de la seconde Partie nous montre l'auteur toujours poursuivi par cette préoccupation et toujours fidèle à sa ligne de conduite. Pour prévenir la confusion entre l'infiniment petit et le très-petit, M. Hoüel a renoncé systématiquement à certaines notations généralement

---

[1] Voir *Bulletin*, t. II, p. 257 ; 1871.

employées et fort commodes; il nous semble qu'en cela ses craintes sont peut-être exagérées.

Voici un résumé succinct des matières que renferme la seconde Partie :

Les quatre premières Leçons comprennent l'intégration des différentielles du premier ordre à plusieurs variables, la formation des équations différentielles par l'élimination des constantes arbitraires et la démonstration de l'existence d'une intégrale générale pour une équation différentielle d'ordre quelconque. Le principe de cette démonstration, qui est une modification de celle qu'a donnée Cauchy, consiste à établir que l'on peut construire, à l'aide de l'équation différentielle donnée, un polygone infinitésimal ayant pour limite déterminée une courbe satisfaisant à n conditions choisies arbitrairement, n étant l'ordre de l'équation différentielle.

Les cinq Leçons suivantes traitent de l'intégration des équations différentielles du premier ordre; une de ces Leçons est consacrée à la recherche des formules d'addition des transcendantes; la IX[e] Leçon a pour objet l'étude des solutions singulières. L'auteur emploie, pour représenter géométriquement l'intégrale générale et les solutions singulières, la considération des lignes de niveau et du contour apparent sur le plan des xy d'une surface dont les coordonnées sont les variables x, y, et la constante arbitraire d'intégration. Cette étude est faite avec soin et éclairée par de nombreux exemples; mais on sait que le dernier mot n'est pas encore dit sur ce sujet [1]. M. Hoüel expose, à la fin de cette Leçon, un critérium des solutions singulières, qui lui a été autrefois communiqué par P.-H. Blanchet, alors maître de conférences à l'École Normale supérieure.

La X[e] Leçon présente l'examen détaillé des cas où l'intégration des équations différentielles d'ordre quelconque peut s'abaisser ou bien être ramenée aux quadratures.

Après ces questions générales, vient l'étude des équations différentielles linéaires d'ordre quelconque (Leçons XI, XII et XIII). Ayant d'abord exposé très-complétement les propriétés des équations différentielles linéaires sans second membre, puis nettement

---

[1] Voir *Bulletin*, t. IV, 1873, p. 158

établi les conditions nécessaires et suffisantes pour que les n intégrales particulières soient distinctes, l'auteur développe les méthodes de d'Alembert, de Lagrange, de Cauchy, pour trouver une intégrale particulière de l'équation avec second membre.

Les équations différentielles simultanées sont l'objet des XIVe, XVe et XVIe Leçons.

Après avoir étudié, dans la XVIIe Leçon, les équations aux différentielles totales du premier ordre et du premier degré à plusieurs variables, M. Hoüel aborde la théorie des équations aux dérivées partielles et y consacre sept Leçons.

Les deux premières Leçons, en traitant de l'élimination des fonctions arbitraires et des équations aux dérivées partielles de certaines familles de surfaces, montrent ainsi une des origines de ce genre d'équations différentielles. Dans les Leçons suivantes, l'auteur, après avoir donné la formation des équations aux dérivées partielles du premier ordre non linéaires et indiqué le rôle de l'intégrale complète, présente, d'une manière générale, l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre, et celle des équations non linéaires du même ordre entre trois variables.

Il n'y a qu'une seule Leçon sur l'intégration des équations aux dérivées partielles d'ordre quelconque, et encore ne s'agit-il que des équations linéaires à coefficients constants; mais il ne faut pas perdre de vue que le Traité de M. Hoüel est destiné aux candidats à la licence; il y a cependant des indications suffisantes pour faire comprendre les méthodes de calcul employées dans la Physique mathématique pour l'intégration des équations aux dérivées partielles.

Tel est le résumé succinct de la partie qui concerne le calcul intégral proprement dit; tout cela est exposé avec netteté et rigueur; le lecteur est conduit pas à pas jusqu'aux confins du Calcul intégral, et les difficultés principales sont écartées de son chemin; chaque règle est toujours accompagnée de nombreux exemples qui permettent d'en comprendre le mécanisme et fixent en même temps le raisonnement.

Les Leçons XXV, XXVI et XXVII renferment les premières notions du Calcul des variations.

Trois Leçons intéressantes terminent le cours proprement dit et initient le lecteur à l'importante étude des surfaces, en lui faisant

connaître la mesure de la courbure des surfaces, le théorème de Gauss sur les surfaces applicables et les propriétés fondamentales des figures formées par les lignes géodésiques.

Ce Cours, déjà si bien rempli, est complété par un *Appendice* de douze leçons, intitulé : *Éléments de la théorie des quantités complexes*. Ces notions, qu'on ne rencontre pas habituellement dans les Traités de Calcul différentiel, sont indispensables pour comprendre la théorie des fonctions, entièrement renouvelée par les découvertes de Cauchy, Riemann, etc. Cet Appendice, qui est un extrait d'un Ouvrage publié par M. Hoüel, sous le titre de : *Théorie élémentaire des quantités complexes,* renferme les questions suivantes :

Notions sur la théorie générale des opérations. — Représentation analytique des points d'un espace à une dimension ; théorie des quantités négatives. — Représentation des points d'un espace à deux dimensions, au moyen des quantités complexes. Opérations algébriques sur les quantités complexes ; addition et soustraction. — Multiplication et division ; puissances et racines des quantités complexes ; proposition fondamentale de la théorie des équations algébriques. — Des fonctions exponentielles et circulaires d'une variable complexe, et de leurs fonctions inverses. — Propriétés générales des fonctions d'une variable complexe. — Intégrales des fonctions d'une variable complexe, prises le long d'un contour donné. — Des intégrales prises autour d'un point. Représentation d'une fonction synectique sous forme d'une intégrale prise autour d'un point. Théorèmes de Cauchy et de Laurent, sur le développement des fonctions en série. — Étude d'une fonction uniforme dans le voisinage d'un zéro ou d'un infini ; applications. — Séries de Bürmann et de Lagrange. — Calcul des intégrales définies. — Application de la théorie des quantités complexes à la Géométrie analytique (Calcul des équipollences de M. Bellavitis).

On voit que ce programme est assez étendu pour initier à la lecture des beaux travaux qui ont été faits sur ce sujet, et cette Partie complémentaire ajoute encore à la valeur du traité de M. Hoüel. L. P.

FOLKIERSKI (Wł.). — ZASADY RACHUNKU RÓŻNICZKOWEGO I CAŁKOWEGO Z ZASTOSOWANIAMI, wyłożył w sposób przystępny dla początkujących *W. Folkierski,* inżynier cywilny, b. uczeń Szkoły Politechnicznéj w Karlsruhe, licencjat nauk matematycznych Paryzkiego Fakulteta Sorbonny, Professor Mechaniki Szkoły wyższéj przygotowawczéj w Paryżu. — Nakładem Bibljoteki Kórnickiéj. Paryż, księgarnia Luxemburska; Warszawa, księgarnia M. Gluecksberga. — Tom I, 1870; Tom II, 1873. — In-8° (¹).

Cet important Ouvrage contient un exposé complet de la partie élémentaire du Calcul infinitésimal. La lecture en est rendue facile par les explications détaillées dans lesquelles l'auteur est entré, et sa publication constitue un grand service rendu aux jeunes mathématiciens appartenant aux pays de langue polonaise. Nous allons donner un aperçu rapide du contenu des deux volumes publiés jusqu'à cette heure.

Le tome Ier se divise en quatre Parties, dont la première, intitulée *Notions préliminaires,* contient les six premiers Chapitres : Généralités sur les fonctions; leur représentation géométrique; quantités imaginaires et leur théorie géométrique; méthode des limites; séries; infiniment petits.

La deuxième Partie, comprenant les Chapitres VII à XII, a pour titre *Calcul différentiel.* La méthode d'exposition employée par l'auteur ne diffère pas de la méthode habituelle. Dérivées et différentielles; Méthodes de différentiation; Dérivées et différentielles d'ordre supérieur, leur calcul direct; Différentiation des fonctions de plusieurs variables; Changement des variables indépendantes. Les points les plus importants sont traités avec détail, et éclaircis par un grand nombre d'exemples.

La troisième Partie est consacrée aux *Applications analytiques du Calcul différentiel,* et se compose des Chapitres XIII à XVIII : Accroissements finis des fonctions (traités d'après la méthode de

---

(¹) *Éléments de Calcul différentiel et intégral,* avec des applications, exposés d'une manière accessible aux commençants; par Ladislas FOLKIERSKI, ingénieur civil, ancien élève de l'École Polytechnique de Carlsruhe, licencié ès Sciences mathématiques de la Faculté de Paris, professeur de Mécanique à l'École préparatoire supérieure de Paris. — Édité par la Bibliothèque de Kórnik. Paris, librairie du Luxembourg; Varsovie, chez Glücksberg. — T. I, 1870, XLVI-1090 p.; t. II, 1873, XIII-742 p. — Le tome I est épuisé. Le tome II se vend séparément 12 fr. Le tome III est sous presse. — Voir *Bulletin,* t. VI, p. 158.

Cauchy); Séries de Taylor, de Maclaurin, de Bernoulli; Développement des fonctions en séries; Vraies valeurs des expressions indéterminées; Maxima et minima; Fonctions de variables imaginaires (fonctions monodromes); Convergence des séries à termes complexes; Fonctions élémentaires d'une variable complexe; différentiation; condition de monogénéité.

Dans la quatrième Partie, formée des six derniers Chapitres, M. Folkierski traite des *Applications du Calcul différentiel à la Géométrie :* Tangentes, asymptotes, contacts des divers ordres, etc., des courbes planes; Points singuliers (exposition claire et complète de cette théorie); Courbure, développées, courbes enveloppes; Tangentes, etc. aux courbes dans l'espace, plans tangents, etc. aux surfaces courbes, contacts des divers ordres, lignes et surfaces osculatrices, points singuliers des surfaces; Double courbure des lignes dans l'espace, développées, enveloppes; Courbure des surfaces, théorèmes de Meusnier et d'Euler, indicatrice, lignes de courbure, théorème de Dupin.

La plupart des Chapitres sont terminés par un recueil d'exercices, avec l'indication des solutions.

A la fin du volume se trouve un Appendice, par M. Lad. Trzaska (p. 1031-1087), intitulé *Notions élémentaires sur les déterminants,* et où les principes de cette théorie sont présentés d'une manière claire et élégante. Nous ferons seulement à M. Trzaska un léger reproche; c'est de transcrire tous les noms propres qu'il cite avec l'orthographe polonaise, qui ne parvient pas toujours à en reproduire exactement la prononciation, mais qui les rend souvent méconnaissables (par exemple, Kele, Kąbeskiur, Pęwę, etc., pour Cayley, Combescure, Painvin, etc.).

Le Tome II, qui a paru le jour du quatre-centième anniversaire de la naissance de Copernic, comprend la première moitié du Calcul intégral. Il est divisé en quinze Chapitres, dont les deux premiers traitent des définitions et des méthodes élémentaires d'intégration. Dans le Chapitre III, l'auteur expose l'intégration des fonctions rationnelles, en suivant, pour la décomposition en fractions simples, la marche tracée par M. Serret dans son *Cours d'Algèbre supérieure.*

Dans le Chapitre IV, il est question de l'intégration des fonctions algébriques irrationnelles. Après avoir traité les cas connus où l'in-

tégration s'effectue au moyen des fonctions élémentaires, l'auteur s'occupe des fonctions rationnelles de x et d'un radical carré portant sur un polynôme du troisième ou du quatrième degré, et il ramène leurs intégrales aux types connus des intégrales elliptiques. Il donne ensuite les formules de réduction des intégrales binômes, et termine par des exemples d'intégration de fonctions qui ne rentrent dans aucun des cas généraux considérés. Le Chapitre V contient les calculs analogues relatifs à l'intégration des fonctions exponentielles, logarithmiques et circulaires.

Le Chapitre VI a pour titre : *Méthode générale d'intégration,* et s'occupe de la solution de ce double problème : 1° Étant donnée une différentielle, reconnaître si elle est intégrable au moyen des fonctions algébriques et logarithmiques, et, si elle l'est, déterminer son intégrale; 2° si elle ne l'est pas, ramener son intégrale au type le plus simple, et trouver les propriétés de la nouvelle transcendante. Théorèmes d'Abel et de Liouville; classification des transcendantes, leur irréductibilité.

L'auteur expose ensuite, dans le Chapitre VII, les principales méthodes pour le calcul des intégrales définies spéciales, prises entre des limites réelles. Intégrales singulières, leurs valeurs principales.

Dans le Chapitre VIII, intitulé *Intégrales multiples,* M. Folkierski traite d'abord de la différentiation et de l'intégration sous le signe $\int$. Il donne ensuite la transformation d'une intégrale du $n^{\text{ième}}$ ordre en une somme d'intégrales du premier ordre, le théorème sur l'interversion de l'ordre des intégrations dans une intégrale double, l'interprétation géométrique des intégrales doubles et triples, et le changement de variables dans les intégrales multiples.

Les Chapitres IX et X ont pour objet les applications de l'intégration à la rectification et à la quadrature des courbes planes, à la complanation et à la cubature des surfaces.

Le Chapitre XI traite des *Intégrales définies à limites imaginaires*. L'auteur rappelle d'abord la condition pour qu'une expression $u = X + Yi$ soit une fonction (monogène) d'une variable complexe $z = x + yi$. Il définit ensuite l'intégrale d'une différentielle complexe, et donne une limite supérieure de la grandeur de

son module. Il démontre le théorème fondamental de Cauchy, $\int_{z_0}^{z_0} f(z)\,dz = 0$, et en déduit les principales conséquences. Cas où la fonction sous le signe $\int$ devient infinie; intégrale de Cauchy $\int_{(K)} \frac{F(z)}{z-\zeta}\,dz$. Intégrales multiformes; fonctions périodiques et indices de périodicité. Exemples du calcul d'intégrales définies à limites imaginaires.

Dans le Chapitre XII, *Intégration des séries,* on donne les théorèmes relatifs à l'intégration et à la différentiation d'une série, et au développement en série d'une fonction synectique. Application à la théorie des fonctions; résidus. Propriétés générales des fonctions synectiques multiformes. Intégrales considérées comme sommes de séries; développements en séries des intégrales elliptiques, du logarithme intégral, etc.

Les séries de Lagrange et de Fourier font l'objet du Chapitre XIII. L'auteur traite la série de Lagrange par la méthode de M. Rouché, et il en donne quelques applications. Il établit ensuite le théorème de Fourier par la méthode de Lejeune-Dirichlet. Séries et intégrales de Fourier.

Le Chapitre XIV est consacré à l'étude des intégrales eulériennes, dont les propriétés sont exposées avec détail.

Le Chapitre XV et dernier traite de l'Application du Calcul intégral au Calcul des Probabilités, et de la méthode des moindres carrés. L'auteur s'est servi principalement de l'Ouvrage de Gauss, traduit par M. Bertrand, et du travail de M. Dienger, intitulé : *Ausgleichung der Beobachtungsfehler nach der Methode der kleinsten Quadrat-Summen* (Brunswick, 1867).

Les divers Chapitres de ce volume, comme ceux du précédent, contiennent des recueils de questions à traiter. Le volume est terminé (p. 713-738) par une Table d'intégrales indéfinies.

L'auteur annonce la publication prochaine du troisième et dernier volume, qui doit contenir l'intégration des équations différentielles et le calcul des variations. A. P.

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

MONTHLY NOTICES OF THE ROYAL ASTRONOMICAL SOCIETY OF LONDON (¹) (suite).

T. XXXIII; novembre 1872 à février 1873.

RAPPORTS ANNUELS

ADRESSÉS AU CONSEIL DE LA SOCIÉTÉ ROYALE ASTRONOMIQUE, PAR LES DIRECTEURS DES DIFFÉRENTS OBSERVATOIRES DE LA GRANDE-BRETAGNE.

Observatoire Royal de Greenwich.

Pendant l'année qui vient de s'écouler, l'Observatoire de Greenwich s'est lancé dans une voie nouvelle, l'Astronomie physique : d'une part, on a observé régulièrement avec un appareil spectroscopique, fixé au grand équatorial, le Soleil, les étoiles et les nébuleuses; d'autre part, on a continué avec le photohéliographe de Kew la belle série des photographies du Soleil, commencée par M. Warren de la Rue, dans cet établissement.

L'Astronome royal, M. Airy, ayant été chargé par le gouvernement et par la Société royale Astronomique de diriger tous les préparatifs des expéditions relatives à l'observation du passage de Vénus, l'Observatoire de Greenwich a dû vérifier et essayer tous les instruments (il y en a vingt) destinés à ces expéditions; tous sont actuellement terminés, et de plus les cabanes d'observation destinées à les abriter sont aussi achevées : c'est là une excellente précaution dont on ne saurait trop féliciter l'Astronome royal. Ajoutons que les observateurs chargés de l'observation du passage de Vénus s'exercent, dès à présent, à Greenwich, au maniement des instruments qu'ils doivent emporter, et à l'observation elle-même du passage, en pointant, comme l'a proposé autrefois M. Wolf, astronome à l'Observatoire de Paris, sur une planète artificielle qu'un mouvement micrométrique approche ou éloigne du bord d'un écran.

(¹) Voir *Bulletin*, t. VI, p. 299.

Au nombre des travaux extraordinaires faits par l'Observatoire de Greenwich en 1872, il faut encore ranger la part qu'il a prise à la détermination de la différence de longitude entre Washington, Paris et Greenwich, faite au moyen du câble transatlantique français, par M. le professeur Hilgard du *Coast-Survey* des États-Unis.

Quant aux travaux ordinaires de l'Observatoire, ils ont suivi leur cours habituel ; néanmoins, le système des observations du cercle méridien a été considérablement étendu, par l'addition, aux étoiles cataloguées jusqu'alors, des étoiles circumpolaires de grandeur inférieure à la 6e, que l'on a observées régulièrement à leur culmination inférieure et à leur culmination supérieure, afin d'étudier l'erreur de collimation de l'instrument.

Aux observations équatoriales on a ajouté aussi l'observation continue des *phénomènes* que présentent les satellites de Jupiter ; cette addition est fort importante, car elle poussera certainement les autres Observatoires à suivre la même voie et à préparer ainsi des matériaux considérables pour la détermination de la masse de Jupiter.

Quant au personnel, il a été fort peu modifié. A la fin de septembre 1872, M. Carpenter, chargé des observations à l'altazimut, a donné sa démission. Il a été remplacé, au mois de décembre, par M. Downing, du Collége de la Trinité, à Dublin.

Observatoire de Radcliffe (Oxford).

Grâce à la libéralité du Comité des Curateurs (*Board of Trustees*) de l'Observatoire, le travail de rédaction du troisième Catalogue de Radcliffe a pu continuer avec rapidité : toutes les observations de passage faites en 1872 sont réduites actuellement, ainsi que celles des déclinaisons faites en 1871.

Les observations au cercle méridien et à l'héliomètre ont d'ailleurs été faites d'après la même marche que dans les années précédentes, et toutes dirigées vers la formation d'un nouveau Catalogue; M. Main y a cependant ajouté l'observation des occultations des étoiles par la Lune, et des phénomènes que présentent les satellites de Jupiter.

Observatoire de la Trinité (Cambridge).

Il y a quelques années, la Société Astronomique allemande (*die Astronomische Gesellschaft*) proposait aux astronomes la réobservation de toutes les étoiles, jusqu'à la 9ᵉ grandeur, contenues dans le Catalogue d'Argelander (*die Durchmusterung des nördlichen Himmels*); c'est à l'exécution de cette idée que l'Observatoire de Cambridge a, cette année encore, consacré la plus grande partie de ses efforts. Les observations s'y font par zones, procédé qui permet d'atteindre une grande rapidité, sans éprouver cependant trop de fatigue : aussi observe-t-on à Cambridge environ quarante étoiles par heure.

Pendant l'année 1872, l'Observatoire de Cambridge a été relié télégraphiquement avec l'Office Météorologique central de Londres.

Observatoire Royal d'Édimbourg.

Les travaux faits à Édimbourg en 1872 paraissent avoir été peu nombreux, à l'exception toutefois des observations météorologiques; celles-ci ont été continuées avec la régularité accoutumée.

L'Observatoire d'Édimbourg est en outre chargé de la centralisation et de la réduction des observations météorologiques faites dans les cinquante-cinq stations de la *Société Météorologique d'Écosse*.

M. Ch. Piazzi Smyth, directeur de l'Observatoire, a passé la plus grande partie de l'année à Palerme, en compagnie de MM. Cacciatore et Tacchini; il a fait à l'Observatoire Royal une série d'observations du spectre de la lumière zodiacale qui présentent un grand intérêt.

Pendant le cours de cette année, d'assez notables améliorations ont été apportées aux instruments de l'Observatoire : un nouveau *gun-signal*, pour la distribution journalière de l'heure, a été établi à Dundee, *gun-signal* qui a été relié télégraphiquement à l'Office général des postes d'Édimbourg.

De plus, l'ancien équatorial de l'Observatoire d'Édimbourg, insuffisant à tous égards et par sa monture et par sa faible puissance optique, a été remplacé par un bel instrument de 2 pieds

($0^m,61$) d'ouverture, construit dans les ateliers de M. Howard Grubb, de Dublin, à qui l'Astronomie devait déjà le grand télescope de l'Observatoire de Melbourne. Cet équatorial permettra à M. P. Smyth d'exécuter désormais chez lui les travaux pour lesquels il était obligé de recourir à l'aide de ses collègues mieux outillés.

Observatoire de Dunsink (Dublin).

M. Brünnow a continué, cette année, les recherches qu'il avait entreprises pour déterminer les parallaxes d'un certain nombre d'étoiles. En même temps, l'Astronome royal pour l'Irlande a étudié certains systèmes stellaires doubles, dont les orbites étaient inconnues.

Enfin, s'associant à la proposition faite par M. Galle, de Breslau, pour employer les observations des petites planètes à la détermination de la distance du Soleil à la Terre, M. Brünnow a suivi au nouvel équatorial de Dunsink, et pendant toute la durée de son opposition, la planète Phocée (25) : malheureusement ces observations, si remarquables par leur exactitude, ne peuvent conduire au but que l'on s'était proposé, par suite du manque d'observations correspondantes dans l'hémisphère austral.

Cette idée de M. Galle, qui doit donner la distance du Soleil à la Terre par une série d'approximations successives se continuant d'année en année, n'est point d'ailleurs abandonnée ; M. Brünnow et d'autres astronomes se proposent de la remettre à exécution dans les années suivantes ; tout nous porte à croire que leurs efforts seront bientôt couronnés du succès qu'ils méritent.

Observatoire de Glasgow.

Comme celui d'Édimbourg, l'Observatoire de Glasgow a fait peu d'observations pendant l'année 1872. Le personnel, d'ailleurs fort restreint, de cet établissement a été surtout employé à la réduction des nombreuses observations faites pendant les années précédentes.

Plus de 4000 positions d'étoiles, de la 6e à la 9e grandeur, appartenant aux zones de Bessel, seront ainsi mises à la disposition des astronomes. Il y a lieu de féliciter M. Grant, directeur de l'Observatoire de Glasgow, de l'interruption qu'il a eu le courage de faire

subir à ses observations. Toute observation non publiée doit être, en général, considérée comme perdue ; et il en est bien certainement ainsi, lorsque ces observations forment la révision d'un Catalogue auquel l'immense réputation de son auteur a fait attribuer une grande autorité.

Nous devons ajouter que la chute des météorites de novembre a été observée avec soin à l'Observatoire de Glasgow, et que les instruments météorologiques enregistreurs, établis sous les auspices du Comité météorologique de la Société Royale, y sont en pleine activité.

Observatoire de Liverpool.

Donner l'heure au port, étudier les chronomètres de la Marine marchande et faire des observations météorologiques, telles sont, on se le rappelle, les travaux qui ont été assignés à l'Observatoire de Bidston, Birkenhead. Aucun d'eux n'a été négligé.

Le mode d'inflammation du *time-gun* établi sur le *Morpeth Dock Pier Head*, à 3 milles environ de l'Observatoire, a été perfectionné ; deux fois chaque jour, l'Observatoire envoie au port de Liverpool la situation météorologique ; enfin, l'étude faite par M. Hartnup, sur cent chronomètres au moins, l'a conduit à des résultats importants :

1° Environ dix pour 100 des chronomètres étudiés ont une marche trop irrégulière pour qu'on puisse les employer en mer.

2° Souvent les défauts dans le mode de compensation des effets de la température (*compensation balance*) produisent dans la marche une variation de plusieurs secondes par jour.

3° Tous les chronomètres étant maintenus, une semaine entière chaque fois, aux températures successives de 55, 70, 85, 70 et 55 degrés Fahrenheit (30°,5, 38°,9, 47°,2, 38°,9, 30°,5 C.), on a reconnu que les meilleurs chronomètres, réglés pour avoir la même marche aux températures extrêmes 55 et 85 degrés, présentaient, à la température intermédiaire 70 degrés, une variation dans leur marche égale à $\frac{6}{10}$ de seconde par jour. C'est, d'après M. Hartnup, la limite maximum que les constructeurs puissent atteindre aujourd'hui dans la compensation de leurs chronomètres.

Observatoire de Durham.

Le mauvais outillage de l'Observatoire de Durham a beaucoup entravé ses travaux. Depuis de longues années, le directeur, M. Chevallier, se consacrait à l'observation des planètes télescopiques dont les orbites étaient mal connues.

Mais il a été amené peu à peu à se convaincre qu'en raison de la petitesse croissante des planètes successivement découvertes, il fallait désormais, pour un travail de cette espèce, un instrument de dimensions beaucoup plus considérables que le sien, semblable, par exemple, au grand équatorial de Greenwich (dôme sud-ouest), ou à celui de Paris (dôme ouest). Aussi M. Chevallier a-t-il complétement modifié le plan de ses travaux, se limitant aux astres, qui, comme les comètes, offrent pour ainsi dire un caractère accidentel.

D'ailleurs les observations météorologiques se sont faites, cette année comme toutes les autres, très-régulièrement à l'Observatoire de Durham, et leur ensemble constitue, pour cette portion de l'Angleterre, l'une des bases les plus sérieuses de la science météorologique.

Observatoire de Kew.

La période décennale, pendant laquelle M. Warren de la Rue s'était chargé des frais que nécessitent les observations au photohéliographe de Kew, expirait au mois de février 1872. Néanmoins on les a continuées jusqu'à la fin de mars. Les mesures et réductions des photographies solaires pour les années 1867, 1868 et 1869 sont en cours de publication dans les *Philosophical Transactions of the Royal Society;* les autres observations de janvier 1870 au 31 mars 1872 seront mesurées et réduites dans le courant de 1873.

A partir de la fin de mars, les observations du Soleil ont été faites à Kew, avec une lunette de $2\frac{1}{2}$ pouces d'ouverture, par la méthode du conseiller Schwabe de Dessau. Nous avons dit plus haut que le photohéliographe de Kew est maintenant installé à l'Observatoire de Greenwich.

L'observatoire de Kew a en outre étudié, pendant l'année 1872, un photohéliographe construit par M. Dallmeyer pour l'Observatoire de Poulkova. Cet instrument, commandé en vue de l'observation du prochain passage de Vénus, paraît être supérieur à celui de

Kew, et les images qu'il donne sont presque complétement exemptes de distorsions.

Observatoire de Stonyhurst.

Les observations astronomiques ont été presque complétement impossibles à Stonyhurst, par suite du mauvais état du ciel. Les travaux de l'Observatoire sont donc purement physiques. On a continué à y enregistrer les variations du magnétisme terrestre et les principaux phénomènes météorologiques.

En outre, pendant les vacances du Collége, le Rév. Perry, directeur de l'Observatoire du Collége de Stonyhurst, a fait le relevé magnétique de la Belgique.

Observatoire de Temple (Rugby).

Cet Observatoire, propriété de l'École de Rugby, vient d'être fondé par les soins et à la mémoire du Rév. Temple, évêque actuel d'Exeter et dernier directeur de l'École. Construit entièrement en bois, l'Observatoire de Rugby possède un équatorial de 8 $\frac{1}{2}$ pouces d'ouverture, construit autrefois par Alvan Clark pour le célèbre Dawes, un réflecteur de 12 $\frac{1}{2}$ pouces construit par With, et une chambre obscure pour les observations spectroscopiques.

MM. Wilson et Seabroke, professeurs à l'École de Rugby, y ont fait un grand nombre d'observations de protubérances solaires et de mesures d'étoiles doubles, en même temps qu'ils formaient aux observations astronomiques un certain nombre de leurs élèves, préparant, dans la mesure de leurs moyens, le recrutement du personnel des nombreux observatoires de la Grande-Bretagne.

Observatoire de lord Lindsay (Dun Echt, Aberdeen).

L'année qui vient de s'écouler a été consacrée à terminer l'installation et l'essai de nombreux instruments achetés par lord Lindsay; ce sont les suivants :

1° Un cercle méridien de Troughton et Simms, semblable à celui de l'Observatoire de Cambridge; son objectif a 8 pouces d'ouverture et 8 pieds 6 pouces de distance focale : les lectures des cercles divisés se font avec huit microscopes micrométriques.

2° Un équatorial de M. Howard Grubb, de Dublin, ayant 15 pouces d'ouverture et 15 pieds de foyer.

3° Un équatorial, de MM. Cook, d'York, de 6 pouces d'ouverture et 6 pieds de foyer.

4° Un héliomètre, dû à Repsold, de Hambourg, ayant 4 pouces français d'ouverture.

5° Un télescope newtonien, de 13 pouces d'ouverture avec 10 pieds 6 pouces de foyer, monté équatorialement.

6° Un grand chronographe.

7° Un altazimut, de Troughton et Simms, dont les cercles ont 12 pouces de diamètre.

Lord Lindsay espère, en outre, pouvoir installer au commencement de 1873 un beau sidérostat de Foucault, qu'il a commandé l'été dernier à MM. Eichens et Martin, de Paris.

La plupart de ces instruments serviront tout d'abord à l'expédition gigantesque que lord Lindsay organise à ses frais, et dont il fera lui-même partie, pour aller observer le prochain passage de Vénus, dans l'île Maurice.

Observatoire de Leyton.

Comme les années précédentes, l'Observatoire de M. Barclay s'est principalement occupé de l'observation des étoiles doubles et des étoiles auxquelles on soupçonne un mouvement propre; les observations seront publiées prochainement et formeront le troisième volume des *Leyton Observations*.

M. Talmage, qui a actuellement la direction de l'Observatoire de M. Barclay a, en outre, observé à l'équatorial de 10 pouces les comètes de l'année et les *phénomènes* des satellites de Jupiter.

Observatoire de M. Buckingham.

Le grand télescope de 21 pouces d'ouverture libre, que possède cet Observatoire, a été employé par M. Buckingham à des mesures de Jupiter, de Saturne et d'un certain nombre d'étoiles; à l'examen attentif des particularités que présentent la surface de Vénus, Mars et Jupiter; et à l'étude suivie du trapèze de la nébuleuse d'Orion, trapèze dans lequel il n'a pu, malgré la puissance optique de instrument, reconnaître trace d'étoile.

Observatoire de M. Knott.

Des observations d'étoiles variables et quelques mesures d'étoiles doubles, tel est le bilan des travaux de Woodcroft, travaux que le mauvais état du ciel a considérablement entravés.

Observatoire Royal du Cap de Bonne-Espérance.

L'attention du personnel de l'Observatoire a été surtout portée vers la réduction et la publication des observations faites au cercle méridien de 1856 à 1861 : on a formé ainsi un catalogue de 1159 étoiles.

Le *time-ball* du port Élizabeth a été relié à l'Observatoire par un second fil, fil de retour, qui indique à l'Observatoire le moment de la chute de la boule du *time-ball*. Ce signal de retour revient à l'Observatoire environ $0^s,5$ après que le premier courant en est parti.

Le service des observations à l'Observatoire du Cap est d'ailleurs un peu entravé depuis quelques années, par suite de la vacance de la troisième place d'assistant, vacance qu'on ne peut remplir depuis plus de deux ans.

Observatoire de Melbourne.

A Melbourne, comme au Cap, les observations méridiennes ont été interrompues pendant l'année 1872, et l'on a préféré s'occuper de la réduction et de la publication de toutes les observations faites jusque-là. Ces observations, faites en vue d'un examen général du ciel austral (*Melbourne zones of the southern Survey*), sont, en effet, fort nombreuses et comprennent actuellement plus de 48 000 étoiles ; il y a là de riches matériaux qu'il importe avant tout de faire connaître.

Quant au grand télescope de Melbourne, il n'est pas pour cela resté inoccupé. M. Ellery, qui vient de remplacer M. Le Sueur, l'a employé à des mesures et dessins de la nébuleuse et des étoiles voisines de η d'Argus, à des observations de Sirius et de son compagnon, de Vénus, Jupiter et Saturne, à la révision de la carte lunaire du Comité de l'Association Britannique, à des photographies de la Lune et de la nébuleuse voisine de η d'Argus, etc.

Ajoutons que les observations météorologiques et magnétiques ont été continuées sans aucune modification au plan tracé par M. Le Sueur.

Observatoire de Sydney.

L'Observatoire de Sydney a à remplir, dans la Nouvelle-Galles du Sud, un rôle excessivement important; outre les observations astronomiques proprement dites, il doit présider à l'installation des stations météorologiques et magnétiques de cette vaste contrée. M. Russell, astronome actuel du gouvernement de la Nouvelle-Galles du Sud, n'a perdu de vue aucun de ces objets.

Le nombre des stations météorologiques de la Nouvelle-Galles s'est considérablement accru; il en existe maintenant quarante-deux, et leurs observations sont publiées mensuellement.

Elles se font, en général, comme dans toute l'Angleterre, au moyen d'appareils enregistreurs; mais les stations établies dans les ports de mer ont en outre ce que les Anglais appellent un *tide-gauge register*, c'est-à-dire un mesureur de marées, qui en enregistre la hauteur et l'époque.

Quant aux observations astronomiques, M. Russell les a continuées d'après le plan qu'il s'était imposé l'an dernier. Toutefois l'équatorial a été plus et mieux employé : on a fait avec cet instrument un grand nombre de mesures d'étoiles doubles et une carte complète de la nébuleuse et des étoiles voisines de η d'Argus.

A ces travaux réguliers sont venus d'ailleurs s'en ajouter d'autres. Ainsi l'Observatoire a déterminé la latitude de la ville d'Orange, et sa différence de longitude avec Sydney; et c'est lui encore qui procède aux préparatifs commandés par le gouvernement de la Nouvelle-Galles du Sud pour l'observation du prochain passage de Vénus. On construit à cet effet deux observatoires temporaires, l'un près de la pointe méridionale de la colonie, l'autre sur les montagnes qui sont à l'est de Sydney.

(*A suivre.*) C. A.

PROCEEDINGS OF THE LONDON MATHEMATICAL SOCIETY. — In-8° (¹).

T. IV; 1871-1873.

SYLVESTER. — *De la décomposition d'un nombre en une somme de deux nombres premiers.* (2 p.)

L'illustre auteur annonce la solution complète de ce problème.

SYLVESTER. — *Sur ce théorème, que toute progression arithmétique qui contient un nombre premier en contient une infinité.* (1 p.)

CAYLEY (A.). — *Sur les surfaces divisibles en carrés infiniment petits par leurs lignes de courbure.* (2 art.; 2 p.)

CAYLEY (A.). — *Sur les surfaces lieux du sommet d'un cône qui passe par m points fixes et touche 6 — m lignes fixes.* (37 p.)

Si l'on désigne par $a, b, \ldots$ la condition de passer par un point, par $\alpha, \beta, \ldots$ celle de toucher une droite, les ordres de ces surfaces sont donnés par le tableau suivant :

$a\ b\ c\ d\ e\ f$	4	$a\ b\ \alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$	24
$a\ b\ c\ d\ e\ \alpha$	8	$a\ \alpha\ \beta\ \gamma\ \delta\ \varepsilon$	14
$a\ b\ c\ d\ \alpha\ \beta$	16	$\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta\ \varepsilon\ \zeta$	8
$a\ b\ c\ \alpha\ \beta\ \gamma$	24		

Après avoir remarqué que cette détermination de l'ordre résulte des principes de M. Chasles sur les coniques satisfaisant à six conditions, l'auteur étudie d'une manière très-détaillée et très-complète les singularités et les équations de ces différentes surfaces.

GLAISHER (J.-W.-L.). — *Sur les constantes qui se présentent dans certaines sommations par la série de Bernoulli.* (9 p.)

ROBERTS (S.). — *Sur les surfaces parallèles aux conicoïdes et aux coniques.* (34 p.)

L'auteur examine d'abord les surfaces à centre et leurs surfaces parallèles, dont il étudie les variétés et les singularités. Il considère ensuite le paraboloïde, la parabole, le cône. La seconde Partie

(¹) Voir *Bulletin*, t. IV, p. 45.

du Mémoire est consacrée aux surfaces réciproques des précédentes et à quelques surfaces associées, au sujet desquelles il donne un grand nombre de résultats.

Strutt (J.-W.). — *Sur les vibrations d'un gaz contenu dans une enveloppe rigide sphérique.* (11 p.)

L'auteur intègre par le moyen des fonctions de Laplace l'équation différentielle du problème, et il applique la solution à divers cas spéciaux.

Cayley (A.). — *Sur la description mécanique de certaines courbes du sixième ordre.* (6 p.)

Ce sont des courbes ayant neuf points doubles.

Glaisher (J.-W.-L.). — *Sur les fonctions dont les dérivées forment une suite récurrente.* (4 p.)

Il s'agit des fonctions définies par l'équation

$$\frac{d^n u}{dx^n} = u.$$

Ces fonctions, considérées déjà par M. Olivier, donnent lieu à des relations remarquables, analogues à celles qui lient les sinus et les cosinus.

Maxwell (J.-Cl.). — *Des transformations de figures dans l'espace, qui jouissent de la propriété de conserver les angles.* (3 p.)

Roberts (S.). — *Des transformations de M. Cremona entre deux figures planes, et des Tables qui s'y rapportent.* (18 p.)

Étude nouvelle d'une importante question, se terminant par un grand nombre de tableaux de ces transformations.

Cotterill (T.). — *Sur une forme algébrique et sur la géométrie de sa connexion dualistique avec un polygone plan ou sphérique.* (3 p.)

Spottiswoode (W.). — *Remarque sur plusieurs récentes généralisations de l'Algèbre.* (17 p.)

Étude détaillée des questions relatives aux nombres complexes. Examen particulier des nombres alternés de Grassmann et de Hankel, et application de ces nombres à la théorie des équations différentielles.

Hermite (Ch.). — *Sur l'intégration des fonctions circulaires.* (10 p.; fr.)

Cayley (A.). — *Sur la description mécanique d'une courbe cubique.* (3 p.)

Clifford. — *Sur un théorème relatif aux polyèdres, analogue à celui de M. Cotterill sur les polygones plans.* (7 p.)

Pour tout polyèdre de n sommets n'ayant que des faces triangulaires, il y a une surface de classe $n-4$ touchant tous les plans diagonaux. Elle contient toutes les lignes diagonales, et ces propriétés suffisent à la déterminer. Si la surface touche le plan de l'infini, le volume du solide est zéro.

Cayley (A.). — *Sur la description mécanique de certaines courbes quartiques par un mandrin à ovale modifié.* (4 p.)

Cayley (A.). — *Sur les lignes géodésiques dans le cas particulier d'une surface quadrique.* (21 p.)

Ce Mémoire contient une étude de l'équation différentielle des lignes géodésiques. Les coordonnées des points de la surface sont considérées comme des fonctions de deux paramètres p, q. L'auteur donne les différentes formules, et discute la forme des lignes géodésiques dans le cas d'un ellipsoïde et d'un hyperboloïde réglé.

Glaisher (J.-W.-L.). — *Sur une déduction de la propriété des nombres de Bernoulli découverte par von Staudt.* (3 p.)

Clifford. — *Géométrie de l'ellipsoïde.* (2 p.)

Examen de la représentation d'un ellipsoïde sur un plan; étude des transformées des lignes de courbure.

Roberts (S.). — *Sur les surfaces parallèles.* (18 p.)

Ordre $2(m^3-m^2+m)$, classe $2m(m-1)^2$, ordre du cône tangent $2m^2(m-1)$, nombre de ses arêtes doubles

$$2m(m-1)(m^4-m^3-7m+8), \text{ etc.}$$

L'auteur détermine un grand nombre de singularités.

Smith (H.-J.-S.). — *Notes arithmétiques : 1° sur les invariants arithmétiques d'une matrice rectangulaire, dont les constituants sont des nombres entiers; 2° sur les systèmes de congruences linéaires; 3° sur une démonstration arithmétique d'un théorème de Calcul intégral.* (17 p.)

Étant donnée une matrice $\| a_{ij} \|$ du type $n \times (n+m)$, si l'on désigne par ∇_s le plus grand commun diviseur des déterminants mineurs d'ordre s, les nombres $\nabla_1, \ldots, \nabla_n$ sont appelés par l'auteur les *invariants arithmétiques*. L'auteur indique sur ces invariants des propositions essentielles.

Il examine ensuite les congruences linéaires, et termine par la démonstration arithmétique d'un théorème de Calcul intégral.

Strutt (J.-W.). — *Étude de la perturbation produite par un obstacle sphérique sur les ondes sonores.* (30 p.)

Développement complet de la solution de ce problème; examen détaillé des cas particuliers et des différentes hypothèses des ondes sonores.

Wolstenholme. — *Sur la sommation de certaines séries.* (5 p.)

Hayward (R.-B.). — *Sur l'extension du terme* aire *à un circuit fermé dans l'espace.* (2 p.)

Glaisher (J.-W.-L.). — *Sur l'évaluation d'une classe d'intégrales définies renfermant des fonctions circulaires en numérateur et des puissances de la variable seulement en dénominateur.* (11 p.)

Roberts (S.). — *Note sur les normales et la surface des centres d'une surface algébrique.* (5 p.)

L'auteur recherche d'abord, dans divers cas particuliers, le nombre des normales qu'on peut mener d'un point à une surface; puis il examine la surface des centres de courbure, dans le cas où la surface proposée offre des singularités, ou est dans une situation particulière par rapport au plan ou au cercle de l'infini. L'article sera continué.

Glaisher (J.-W.-L.). — *Sur le calcul de la valeur de l'unité angulaire théorique avec un grand nombre de décimales.* (4 p.)

Wolstenholme. — *Sur les systèmes d'équations porismatiques, tant algébriques que trigonométriques.* (9 p.)

Wolstenholme. — *Sur les épicycloïdes et les hypocycloïdes.* (7 p.)

Discussion des plus importantes propriétés de ces courbes au moyen de leur double mode de génération, et examen particulier des plus remarquables.

WOLSTENHOLME. — *Sur le lieu du point de concours de deux tangentes rectangulaires à la cardioïde.* (3 p.)

WOLSTENHOLME. — *Du mouvement elliptique, l'accélération ayant une direction constante.* (3 p.)

MAXWELL (J.-Cl.). — *Sur la théorie d'un système de conducteurs électrisés, et sur d'autres théories physiques renfermant des fonctions quadratiques homogènes.* (3 p.)

MAXWELL (J.-Cl.). — *Sur les lignes focales d'un faisceau réfracté.* (5 p.)

HERMITE (Ch.). — *Sur une application de la théorie des courbes unicursales.* (2 p.)

M. Hermite indique, dans une Lettre à M. Cayley, comment on peut employer les courbes unicursales pour résoudre diverses questions, en particulier pour intégrer l'équation $F\left(u, \frac{du}{dx}\right) = 0$, déjà traitée par MM. Briot et Bouquet. M. Hermite développera sans doute ce travail, et nous aurons à revenir sur les importants points de vue qu'il signale ici.

CAYLEY (A.). — *Plan d'un appareil pour tracer les courbes.* (2 p.)

CAYLEY (A.). — *Sur les courbes bicursales.* (6 p.)

ROBERTS (S.). — *Sur les caractéristiques plückériennes des épitrochoïdes et hypotrochoïdes, et des courbes qui s'y rattachent.* (3 p.)

STRUTT (J.-W.) (lord RAYLEIGH). — *Théorèmes généraux relatifs aux vibrations.* (11 p.)

TIDSSKRIFT FOR MATHEMATIK, udgivet af *H.-G. Zeuthen*. Tredie Række ([1]).

T. I et II; 1871-1872.

ZEUTHEN (H.-G.). — *Sur le principe de dualité.* (2 art.)

Dans le premier de ces deux articles, qui font suite à un article

---

([1]) Voir *Bulletin*, t. V, p. 277. Nous ajoutons ici quelques nouveaux développements sur plusieurs articles déjà signalés.

sur la dualité dans la Géométrie de *situation*, l'auteur expose la dualité au moyen des coordonnées cartésiennes; dans le second, il l'expose au moyen des coordonnées projectives, et en prouve la généralité.

Lorenz (L.) et Zachariæ (G.). — *Compensation des erreurs d'observation.* — Polémique à l'occasion de ce Mémoire.

M. Lorenz, dans son article, traite la question du nombre des constantes (éléments) dont il faut se servir pour compenser les erreurs d'une série donnée d'observations. Il faut, d'après lui, choisir le nombre (e) de manière que $[pv^2] + 2em^2$ soit un minimum, $[pv^2]$ étant la somme des carrés des corrections multipliés respectivement par les poids des observations, et m étant l'erreur moyenne correspondante à l'unité de poids. M. Zachariæ conteste ce principe, et M. Lorenz le défend, en même temps qu'il cherche à montrer l'insuffisance de la méthode ordinaire.

Zeuthen (H.-G.). — *Démonstration élémentaire d'un théorème d'Algèbre supérieure.*

Il s'agit de ce théorème de Clebsch, que tout covariant de formes algébriques linéaires, à n variables, est une fonction entière et rationelle des formes données et de leurs déterminants (ou de covariants identiques). L'auteur prouve, par une substitution particulière, qu'il en est une fonction rationnelle. L'expression trouvée conduit à des équations identiques, qui servent à la rendre entière.

T. III; 1873.

Gram (J.-P.). — *Essai d'un développement élémentaire des principes fondamentaux de la théorie des invariants.* (21 p.)

1. Formes algébriques. Transformations linéaires. — 2. Forme des relations de transformation. — 3. Invariants simultanés absolus. — 4. Invariants. — 5. Formules symboliques. — 6. Fonctions qui se rattachent aux invariants.

Thiele (T.-N.). — *Sur une formule d'approximation.* (11 p.)

Si $\varphi(x)$ désigne une fonction qui, comme la fonction e^{-x^2}, par exemple, s'annule, ainsi que toutes ses dérivées, pour $x = \pm\infty$, et que l'on applique à cette fonction la formule connue pour le passage

des intégrales aux sommes,

$$(1)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{r=r_1}^{r=r_2} \varphi(c+ar) \mp \frac{1}{2}\left[\varphi(c+ar_1)+\varphi(c+ar_2)\right] \\ \displaystyle\quad = \frac{1}{a}\int_{c+ar_1}^{c+ar_2} \varphi(x)\,dx + \frac{B_1 a}{1.2}\left[\varphi'(c+ar_2)-\varphi'(c+ar_1)\right]+\ldots, \end{cases}$$

cette formule se réduit, pour $r_1 = -\infty$, $r_2 = +\infty$, à la simple équation

$$(2)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = a.\sum_{r=-\infty}^{r=+\infty} \varphi'(c+ar),$$

c'est-à-dire que *l'intégrale est égale à l'intervalle multiplié* par la somme. Le raisonnement qui se fonderait, pour établir la formule (2), simplement sur ce que, pour $r = \pm\infty$, chaque terme de la série du second membre de (1) s'annule, ne serait nullement rigoureux, à cause de la présence de nombres de Bernoulli dans les coefficients de la série. M. Thiele, après avoir reconnu par expérience que la formule (2) fournit toujours une grande approximation, a voulu l'établir directement, et il y est parvenu par la considération des fonctions Θ de Jacobi.

Lorenz (L.). — *Réponse à M. Zachariæ.*

Petersen (J.). — *Sur la convergence des séries.* (6 p.)

L'auteur expose, d'une manière qu'il considère comme plus propre à en faire comprendre l'esprit, la démonstration des caractères de convergence établis par Cauchy, Duhamel et Bertrand (ou de Morgan), pour les cas douteux successifs.

Thiele (T.-N.). — *Exposition intuitive* (orienterende) *de la théorie des fonctions elliptiques, et essai pour en faciliter l'étude.* (20 p.)

L'auteur, ayant eu l'occasion, dans ses recherches sur une formule d'approximation mentionnées plus haut, d'étudier de nouveau la théorie des fonctions elliptiques, présente ici les principes de cette théorie d'une manière qui lui a paru la plus simple et la plus lumineuse, en s'appuyant sur les propriétés des fonctions Θ de Jacobi, qu'il désigne dans son Mémoire par la lettre Φ.

Steen (A.). — *Une proposition générale.* (2 p.)

Étant donnée l'équation différentielle

$$\frac{dx}{Ax + By + C} = \frac{dy}{A'x + B'y + C'}$$
$$= \frac{\lambda dx + \mu dy}{(A\lambda + A'\mu)x + (B\lambda + B'\mu)y + C\lambda + C'\mu},$$

où λ et μ sont deux facteurs indéterminés, on rend la dernière fraction intégrable en assujettissant λ et μ à la condition

$$\frac{A\lambda + A'\mu}{\lambda} = \frac{B\lambda + B'\mu}{\mu}.$$

On en tire alors la valeur commune des intégrales

$$\int \frac{dx}{Ax + B\mu + C}, \quad \int \frac{dy}{A'x + B'y + C'},$$

où l'une des variables doit être remplacée par sa valeur en fonction de l'autre tirée de l'intégrale de l'équation.

Zeuthen (H.-G.). — *Sur la forme des courbes du troisième et du quatrième ordre.* (21 p., 1 pl.)

Les résultats que l'auteur expose relativement à la forme des courbes du *troisième* ordre sont connus; pour les établir ici, il s'est servi en partie de moyens analogues à ceux qu'il emploie ensuite pour l'étude de la forme des courbes du *quatrième* ordre. Ces résultats ont été exposés devant le Congrès des Naturalistes scandinaves, et plus tard dans un article des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* [1].

Oppermann (L.). — *Quelques propositions élémentaires sur la convergence des séries.* (3 p.)

Christiansen (C.). — *Sur l'addition des rectangles.* (3 p.)

Steen (A.). — *Deux fractions continues, relatives aux intégrales elliptiques.* (5 p.)

L'auteur développe en fraction continue des intégrales particulières des deux équations différentielles du second ordre auxquelles

---

[1] Séance du 28 juillet 1873. Voir *Bulletin*, t. VI, p. 78.

satisfont les intégrales elliptiques complètes, considérées comme fonctions du carré du module.

Steen (A.). — *Récréation mathématique.*

Question de probabilité.

Steen (A.). — *Les progrès des études mathématiques en Danemark dans ce siècle.* (13 p.)

Lorenz (L.). — *Sur le facteur d'Euler.* (3 p.)

Démonstration de deux théorèmes de M. P.-C.-V. Hansen :

1° Si l'équation différentielle

$$M\,dx + N\,dy = 0,$$

où M, N sont des fonctions rationnelles de x, y, a des facteurs d'intégration exprimables au moyen des fonctions élémentaires (algébriques, logarithmiques ou exponentielles) de x, y, l'un d'eux au moins doit être de la forme

$$\varphi = e^{C_1 \log U_1 + \ldots + C_m \log U_m + V},$$

$U_1, \ldots, U_m$, V étant des fonctions rationnelles de x, y, et $C_1, C_2, \ldots, C_m$ des constantes.

2° Si l'équation différentielle

$$dy = P\,dx,$$

où P est une fonction algébrique de x, y, a des facteurs d'intégration exprimables au moyen des fonctions élémentaires de x, y, l'un d'eux au moins doit être de la forme

$$\varphi = e^{C_1 \log U_1 + \ldots + C_m \log U_m + V}$$

$U_1, \ldots, U_m$, V étant des fonctions rationnelles de x, y, P, et $C_1, \ldots, C_m$ des constantes.

Juel (C.). — *Sur les courbes podaires.* (12 p.)

VIERTELJAHRSCHRIFT DER NATURFORSCHENDEN GESELLSCHAFT IN ZÜRICH (¹).

XVIIe année; 1872.

WOLF (R.). — *Communications astronomiques.* Nos XXX, XXXI, XXXII. (3 art., 34-44-32 p.)

Observations des taches solaires en 1871, calcul des nombres relatifs et des variations pour cette année, et nouveau calcul des mêmes quantités pour l'année précédente. Sur une périodicité des cirrus, parallèle à celle des taches solaires. Études sur un pendule à seconde électrique construit par Hipp. Suite de la bibliographie des taches solaires.

Sur une dépendance présumée entre la fréquence des cyclones et des taches solaires; sur les déterminations de la variation magnétique à Pékin. — Sur l'Arithmétique de Jost Bürgi, et sur ses méthodes pour le calcul d'une grande Table de sinus. Bürgi (²), déjà connu comme ayant inventé les logarithmes en même temps que Neper, est aussi l'auteur d'une Table trigonométrique, la plus étendue qui eût été construite à son époque. Cette Table, qui n'a pas été imprimée, contenait, avec huit décimales, les sinus des angles, de 2 en 2 secondes. Bürgi avait composé une Introduction, que M. Frisch, dans son édition des œuvres de Kepler, désigne sous le nom de « *Byrgii Arithmetica* », et dont une copie, malheureusement inachevée, se trouve parmi les manuscrits de Kepler, à la Bibliothèque de l'Observatoire de Poulkova. Dans ce travail, dont M. Wolf cite des extraits intéressants, Bürgi expose les procédés qu'il a suivis pour porter à un plus haut degré que ses prédécesseurs l'exactitude et l'étendue des Tables de sinus. Il a calculé directement, à l'aide de bissections, de trisections et de quintisections, la corde de 4 secondes ou de la 324000ième partie de la demi-circonférence, en résolvant, par des approximations successives, des équations du troisième et du quatrième degré. De là il a déduit, par des procédés semblables à ceux que l'on emploierait aujourd'hui, les sinus des multiples de 2 secondes. Bürgi paraît avoir inventé, en même temps que Simon

---

(¹) Voir *Bulletin*, t. IV, p. 50.

(²) Telle est la véritable orthographe de ce nom, que l'on a écrit à tort de diverses manières : Byrg, Byrgi, Burgi, etc.

Stevin, la notation et l'usage des fractions décimales ; il pratiquait aussi, comme on le fait de nos jours, la multiplication abrégée.

Suite du Catalogue des instruments, appareils et autres collections de l'Observatoire de Zurich.

Sur le Calendrier perpétuel allemand de Regiomontanus. Histoire de la prostaphérèse, inventée par Tycho, Wittich et Bürgi, pour l'usage auquel ont servi plus tard les logarithmes. La prostaphérèse (de deux mots grecs signifiant *addition* et *soustraction*) était une méthode consistant à remplacer, dans les formules de Trigonométrie sphérique, tous les produits de sinus par des sommes ou des différences, de sorte qu'il ne restât plus finalement qu'une division à effectuer. Ainsi la formule fondamentale

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

s'employait sous la forme

$$\cos A = \frac{\cos a - \frac{1}{2}\left[\cos(b-c) + \cos(b+c)\right]}{\frac{1}{2}\left[\cos(b-c) - \cos(b+c)\right]}.$$

Cet ingénieux artifice, inventé probablement par Tycho et par Paul Wittich, et dont on ne trouve aucune trace chez les Arabes, ni chez Regiomontanus, a été employé à l'Observatoire de l'île de Hveen, à partir de 1582. C'est là sans doute ce qui a fait dire faussement que l'invention des logarithmes avait été rapportée de Danemark en Écosse, par un compatriote de Neper, nommé Craig.

Schneebeli (H.). — *Les figures de poussière sur les conducteurs électriques de Kundt.* (6 p.)

Wolf (R.). — *Notice sur l'histoire des Sciences en Suisse* (suite). (4 art., 7-12-10-14 p.)

Suite des extraits de la correspondance de Zach avec Schiferli et Horner.

Mousson, Wettstein, Wolf, Weilenmann, etc. — *Sur l'aurore boréale du 4 février* 1872. (16 p.)

Mousson (A.). — *Remarques sur la construction d'un dispersiomètre.* (13 p.)

Denzler (W.). — *Sur la décomposition des fonctions fractionnaires pures.* (12 p.)

L'auteur remarque que, si l'on décompose, par exemple, la fraction [1]

$$\frac{-x^2-5x+23}{(x^2+4x+13)^2}$$

sous la forme

$$\frac{A}{(x-2-3i)^2}+\frac{B}{x-2-3i}+\frac{C}{(x-2+3i)^2}+\frac{D}{x-2+3i},$$

et que l'on fasse disparaître les imaginaires, on retombe précisément sur la fraction proposée. Il expose un procédé général et expéditif pour obtenir directement la décomposition en fractions de la forme

$$\frac{\alpha}{\beta(x-b)^m} \quad \text{ou} \quad \frac{Ax+B}{C[(x-p)^2+q^2]^m},$$

α, β, A,... étant des nombres réels.

Wolf (R.). — *Observations de la pluie d'étoiles du 27 novembre* 1872. (4 p.)

Beck (A.). — *Les propriétés fondamentales des systèmes de lentilles, exposées géométriquement.* (21 p.)

On suppose les rayons lumineux faisant de très-petits angles avec l'axe, et les surfaces sphériques, qui terminent les lentilles, correspondant à de très-petits angles au centre. La question a été traitée analytiquement par Gauss [2], Helmholtz [3], Maxwell [4], Hansen [5] et d'autres. Elle a été reprise avec succès, à l'aide de considérations géométriques, par C. Neumann [6], Martin, Reusch, Topler, etc. Möbius [7] avait déjà fait remarquer qu'il existait entre l'objet et l'image des relations de collinéation (homographie). Ainsi les procédés de la nouvelle Géométrie sont ceux qui conviennent le mieux pour une exposition claire de cette théorie. C'est dans ce sens qu'a été établie la théorie donnée par Lippich [8]. Dans le

(1) *Voir* Schlömilch, *Comp. d. höh. Anal.*, t. I, p. 295.

(2) *OEuvres*, t. V.

(3) *Physiologische Optik*, 1856.

(4) *Quarterly Journal of Mathematics*, t. II, 1858.

(5) *Abhandl. d. Königl. sächs. Gesellschaft d. Wiss.*, t. X, 1872.

(6) *Haupt-und Brennpunkte eines Linensystems;* Leipzig, 1866.

(7) *Bericht d. Gesellschaft d. Wiss. in Leipzig*, t. VII, 1855.

(8) *Fundamentalpunkte eines Systems centrirter brennender Kugelflächen.* Graz, 1871.

Mémoire de Casorati ([1]), l'exposition analytique a été grandement simplifiée par l'emploi des déterminants, et il est prouvé que les propriétés fondamentales subsistent encore, lors même que le système n'est pas exactement centré. M. Beck établit par la Géométrie pure la théorie des systèmes de lentilles, avec la généralisation de Casorati.

Wolf (R.). — *Quelques remarques de Horner, sur les poids et mesures chinois.*

Culmann. — *Étude graphique générale d'une poutre élastique de section variable et chargée d'une manière quelconque.*

MÉLANGES.

DES TRANSFORMATIONS RATIONNELLES DANS L'ESPACE.

Travaux de M. CREMONA.

GÉNÉRALITÉS.

1. Supposons quatre variables homogènes et indépendantes x_1, x_2, x_3, x_4, liées à quatre variables analogues ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 par les relations

$$(1)\qquad x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3 : \varphi_4,$$

où les φ sont des fonctions algébriques, rationnelles, entières et homogènes d'un même degré ν des ξ.

Si l'on considère les x et les ξ comme les coordonnées de deux points correspondants dans deux espaces à trois dimensions, les relations (1) expriment qu'à un point quelconque de l'espace (ξ), pourvu qu'il ne soit pas commun aux quatre surfaces $\varphi = 0$, ne correspond qu'un seul point déterminé de l'espace (x), et qu'aux plans

$$(2)\qquad a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0$$

([1]) Voir *Bulletin*, t. IV, p. 65.

de l'espace (x) correspondent les surfaces d'ordre ν

$$(3) \qquad a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2 + a_3 \varphi_3 + a_4 \varphi_4 = 0,$$

qui forment un système linéaire triplement infini.

Supposons maintenant que des relations (1) on puisse tirer les valeurs des ξ exprimées rationnellement en fonction des x, c'est-à-dire que les formules inverses des relations (1) soient

$$(4) \qquad \xi_1 : \xi_2 : \xi_3 : \xi_4 = f_1 : f_2 : f_3 : f_4,$$

où les f sont des fonctions entières homogènes des x, d'un même degré n.

Cela revient à supposer que le système (3) est tel que trois de ses surfaces prises arbitrairement n'ont qu'un seul point commun, n'appartenant pas à toutes les surfaces du système; d'où il résulte aussi qu'à un point quelconque de l'espace (x), pourvu qu'il ne soit pas commun à toutes les surfaces $f = 0$, correspond un seul point bien déterminé de l'espace (ξ). Des relations (4) on déduit, en outre, qu'aux plans

$$(5) \qquad \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \alpha_3 \xi_3 + \alpha_4 \xi_4 = 0,$$

de l'espace (ξ) correspondent les surfaces d'ordre n

$$(6) \qquad \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 + \alpha_4 f_4 = 0,$$

qui forment un système linéaire triplement infini. En vertu des relations (1), trois quelconques de ces surfaces se coupent en un seul point non commun à toutes les surfaces du système. Les formules (1) et (4) signifient aussi que chacune des surfaces des systèmes (3) et (6) est représentable point par point sur un plan.

2. Pour abréger, nous appellerons *homaloïde* une surface qui jouit de la propriété de pouvoir être représentée, point par point, sur un plan, et *homaloïdal* un système de surfaces algébriques qui satisfait, comme les systèmes (3) et (6), aux deux conditions : 1° d'être linéaire et triplement infini; 2° que trois surfaces, prises arbitrairement dans le système, se coupent en un seul point non commun à tout le système. Les surfaces d'un système homaloïdal sont nécessairement homaloïdes.

Ces dénominations peuvent s'appliquer aux figures planes ou

tracées sur une surface homaloïde; ainsi une courbe homaloïde sera une courbe rationnelle, et un réseau homaloïdal de courbes sera un système linéaire doublement infini de courbes rationnelles dont deux quelconques ne se coupent qu'en un seul point non commun à toutes les courbes du réseau.

3. Si l'on donne un système homaloïdal (3) dans un espace (ξ), nous pouvons poser les formules (1), c'est-à-dire établir une correspondance simple entre les surfaces (3) et les plans d'un autre espace (x), et puis en déduire les formules (4). Nous déterminons ainsi, dans l'espace (x), un nouveau système homaloïdal (6), que l'on peut dire *inverse* du système donné. Les deux systèmes homaloïdaux servent de base à deux transformations inverses, toutes les deux rationnelles, qui existent sans présupposer aucune relation entre les variables des deux espaces.

Il suffit donc que l'on donne un système homaloïdal pour que le système inverse et les deux transformations rationnelles inverses, par lesquelles on passe de l'un à l'autre espace et réciproquement, soient déterminés.

En d'autres termes, la recherche des transformations rationnelles dans l'espace (comme dans le plan) est réduite à celle des systèmes homaloïdaux.

4. Nous donnerons le nom de *fondamental* ou *principal* à tout point et à toute ligne qui appartient, en commun, à toutes les surfaces d'un système homaloïdal. Deux surfaces quelconques

$$(7)\qquad \begin{cases} a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + a_3\varphi_3 + a_4\varphi_4 = 0, \\ a'_1\varphi_1 + a'_2\varphi_2 + a'_3\varphi_3 + a'_4\varphi_4 = 0 \end{cases}$$

du système (3) auront, outre les courbes fondamentales, une courbe Ξ qui doit correspondre, point par point, à la droite d'intersection des plans

$$(8)\qquad \begin{cases} a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4, \\ a'_1 x_1 + a'_2 x_2 + a'_3 x_3 + a'_4 x_4, \end{cases}$$

et qui, par suite, est nécessairement une courbe rationnelle. Et comme la droite (8) rencontre en n points une surface quelconque f du système (6), la courbe Ξ, définie par les équations (7), aura

n points communs avec un plan quelconque (5) de l'espace (ξ); donc :

Aux droites de l'espace (x) *correspondent des courbes gauches rationnelles, d'ordre n, dont chacune est déterminée par quatre conditions.*

De même :

Aux droites de l'espace (ξ) *correspond un système quadruplement infini de courbes gauches rationnelles d'ordre* ν.

Nous désignerons par X une quelconque de ces courbes communes à deux surfaces f du système (6).

5. Dans l'espace (x), une droite et un plan ont un seul point commun, si la droite n'est pas entièrement dans le plan; donc :

Une courbe Ξ *rencontre une surface* φ *du système* (3), *sur laquelle elle n'est pas tout entière, en un seul point non commun à toutes les surfaces* φ; ou bien :

Des νn *intersections d'une courbe* Ξ *et d'une surface* φ, *il y en a* $\nu n - 1$ *qui sont situées sur les courbes fondamentales ou qui se confondent avec les points fondamentaux du système* (3).

Ces $\nu n - 1$ intersections tiennent lieu de $4(n-1)$ conditions linéaires parmi les $4n$ conditions qui déterminent, en général, une courbe rationnelle d'ordre n, puisque, comme nous l'avons vu, les courbes Ξ forment un système quadruplement infini.

Les courbes X jouissent de propriétés analogues : cela est dit une fois pour toutes.

6. Je considère un plan a_0 dans l'espace (x) auquel correspond, dans l'espace (ξ), une surface φ_0 du système (3). Aux droites de a_0 correspondront les courbes Ξ de φ_0, et les sections planes de φ_0 auront pour images sur a_0 les courbes d'ordre n d'un système linéaire triplement infini, et tel que deux courbes quelconques du système ont ν intersections variables (qui correspondent aux points où φ_0 est coupée par une droite quelconque). Par suite, si ces courbes ont m_i points i-ples fixes ($i = 1, 2, 3, \ldots, \xi - 1$), nous aurons les

deux relations

$$n^2 - \sum_i i^2 m_i = \nu,$$

$$\frac{1}{2} n(n+3) - \sum_i \frac{1}{2} i(i+1) m_i = 3,$$

qui donnent

$$3n + \nu = \sum_i i m_i + 6.$$

Soit I un quelconque des m_i points i-ples dont nous venons de parler; à chacun de ces points correspondra sur φ_0 une courbe rationnelle Γ_i d'ordre i, et à une droite G tracée arbitrairement par I dans a_0 correspondra une autre courbe rationnelle Γ_{n-i} d'ordre $n-i$ qui, prise avec Γ_i, forme une courbe Ξ, et qui a un point commun avec Γ_i (point double pour la courbe Ξ) correspondant au point infiniment voisin de I sur G. Si G tourne autour de I, Γ_{n-i} varie, et le point double parcourt la courbe fixe Γ_i; mais la courbe Ξ, composée de Γ_i et d'une des courbes Γ_{n-i}, peut être considérée comme l'intersection (non complète) de deux surfaces φ; par suite, le point commun aux courbes Γ_i, Γ_{n-i}, étant double pour la courbe Ξ, sera un point de contact entre les deux surfaces φ; donc tout point de Γ_i est un point de contact entre deux surfaces φ (ou bien un point double d'une surface φ); mais le lieu des points de contact entre les surfaces φ, ou des points doubles des surfaces φ est la *jacobienne* du système (3), c'est-à-dire une surface de l'ordre $4(\nu-1)$; donc la courbe Γ_i située sur φ_0, qui correspond au point I de a_0, se trouve aussi sur la jacobienne des surfaces φ.

Comme les surfaces f de (x) correspondent aux plans de (ξ), les courbes d'ordre n du système linéaire, dont nous venons de nous occuper, ne sont autre chose que les traces des surfaces f sur le plan a_0, et les m_i points i-ples (parmi lesquels se trouve I) seront les intersections de ce plan avec une courbe C_{m_i} d'ordre m_i, i-ple pour toutes les surfaces f. Réciproquement, si une courbe Ξ se décompose, son image, qui est une droite, doit passer par un point I. Donc :

A tout point d'une courbe fondamentale i-ple pour toutes les surfaces f de l'espace (x) correspond une courbe rationnelle

d'ordre i, dont le lieu géométrique est une surface qui fait partie de la jacobienne des surfaces φ.

L'ordre de ce lieu sera égal au nombre des intersections (non fixes) d'une courbe quelconque X avec la courbe fondamentale i-ple de l'espace (x). Son *genre* sera aussi égal au genre de la courbe fondamentale correspondante.

7. S'il existe une courbe fondamentale parmi celles de l'espace (x) qui ne soit rencontrée par les courbes X en aucun point non fixe, la surface qui lui correspondra sera d'ordre zéro, c'est-à-dire qu'à un point quelconque de cette courbe correspondra une *courbe fixe*, qui doit se trouver sur chacune des surfaces φ, et qui est, par conséquent, une courbe fondamentale de l'espace (ξ). Si la première courbe est i-ple pour les surfaces f et d'ordre i', la seconde courbe sera de l'ordre i et multiple suivant i' pour les surfaces φ. La relation entre les deux courbes est *réciproque;* en d'autres termes, à chaque point de la seconde courbe correspond toute la première courbe, et la seconde courbe n'est coupée en aucun point par une courbe Ξ quelconque.

8. Une droite rencontre la jacobienne des f en $4(n-1)$ points; donc une courbe Ξ quelconque coupe en $4(n-1)$ points l'ensemble des courbes fondamentales et des points fondamentaux de l'espace (ξ); mais $4(n-1)$ est précisément le nombre des conditions linéaires communes aux courbes Ξ, puisqu'elles forment un système quadruplement infini; donc la condition de rencontrer les courbes fondamentales et les points fondamentaux de l'espace (ξ) en $4(n-1)$ points détermine complétement les courbes Ξ.

Quand une courbe Ξ se décompose en deux courbes Γ_i, Γ_{n-i}, la première appartient à une série simplement infinie qui fait partie de la jacobienne des φ; la seconde, au contraire, correspondant à une droite qui passe par un point I [d'une courbe fondamentale i-ple dans (x)], appartient à un système doublement infini : elle est assujettie à $4(n-1)-2$ conditions. L'une de ces conditions est de rencontrer Γ_i en un point; donc Γ_{n-i} rencontrera les courbes fondamentales et les points fondamentaux de l'espace (ξ) en $4(n-1)-3$ points. Ces points correspondront à ceux où la droite correspondant à Γ_{n-i} coupe la jacobienne des f en dehors de I; donc,

si nous nommons k_i le degré de multiplicité de la courbe fondamentale i–ple de l'espace (x) pour la jacobienne des f, nous aurons

$$4(n-i)-3=4(n-1)-k_i,$$

d'où

$$k_i=4i-1,$$

ou bien :

Une courbe fondamentale de l'espace (x), i-*ple pour les* f *et coupée par les courbes* X, *est multiple suivant* $4i-1$ *pour la jacobienne des* f.

La courbe Γ_i, appartenant à une série simplement infinie, est assujettie à $4i-1$ conditions linéaires, c'est-à-dire coupe en $4i-1$ points les courbes fondamentales de l'espace (ξ); I est un point $(4i-1)$–ple pour la jacobienne des f, ce qui concorde avec la conclusion ci-dessus.

9. Si la courbe fondamentale i–ple pour les f est telle que les courbes X ne la coupent pas, auquel cas une courbe fixe Γ_i fondamentale dans l'espace (ξ) correspond à chacun de ses points (n° 7), les courbes Γ_{n-i} qui, avec Γ_i, composent une courbe Ξ, appartiennent à un système triplement infini; car elles correspondent aux droites qui coupent la courbe i–ple pour les f en un point non donné; elles sont donc assujetties à $4(n-i)-3$ conditions. Une de ces conditions consiste en ce qu'elles doivent couper Γ_i; les autres $4(n-i)-4$ conditions consistent en autant de rencontres avec les courbes fondamentales et les points fondamentaux de l'espace (ξ). Nous aurons donc, dans ce cas,

$$4(n-i)-4=4(n-1)-k_i,$$

ou $k_i=4i$, ce qui revient à dire que

Une courbe fondamentale de l'espace (x), i–*ple pour les* f, *qui n'est pas coupée par les courbes* X *en des points non fixes, est multiple suivant* $4i$ *pour la jacobienne des* f.

Si la courbe en question est de l'ordre i', une courbe d'ordre i lui correspond dans l'espace (ξ), et elle est i'–ple pour les φ et $4i'$–ple pour la jacobienne des φ.

10. Si deux courbes fondamentales de l'espace (x), multiples pour la surface f, l'une suivant i, l'autre suivant j $(j \geqq i)$, ont un point commun, à ce point correspondra une courbe qui se décompose en deux courbes Γ_i, Γ_{j-i}, dont la première sera commune aux deux surfaces qui font partie de la jacobienne des surfaces φ et correspondent à ces deux courbes fondamentales de l'espace (x). Comme cas particulier, si une courbe fondamentale de l'espace (x), i-ple pour les f, a un point double, à ce point correspondra une courbe Γ_i double pour la surface correspondant à cette courbe fondamentale.

11. Nous avons déjà vu qu'à un point I d'une courbe fondamentale de l'espace (x), i-ple pour toutes les surfaces f, correspond une courbe rationnelle Γ_i, d'ordre i. Si Γ_i est tout entière dans un plan, à ce plan correspondra une surface f pour laquelle I est un point $(i+1)$-ple. En effet, à une droite tirée arbitrairement par I correspondra une courbe Γ_{n-i} d'ordre $n-i$, qui a un point commun avec Γ_i et, par suite, coupe le plan de cette courbe en $n-i-1$ autres points. Donc la droite arbitraire menée par I coupe la surface f correspondant au plan de Γ_i en $n-i-1$ autres points; cela veut dire que pour cette surface f le point I est multiple suivant $n-(n-i-1)=i+1$.

Si $i=1$, aux plans passant par une droite Γ_1 correspondent des surfaces f pour lesquelles I est un point double. Si deux droites analogues à Γ_1 sont dans un même plan, à ce plan correspondra une surface f douée de deux points doubles, etc.

12. On démontre de la même manière que, si les f ont une courbe fondamentale i-ple et d'ordre i' à chacun des points de laquelle corresponde une courbe fixe plane (i'-ple pour les φ et d'ordre i), au plan de cette courbe correspondra une surface f, pour laquelle la première courbe sera multiple suivant $i+1$.

13. Si les surfaces φ ont un point fondamental commun Ω par lequel passent ρ branches de chacune des courbes Ξ, toute droite de l'espace (x) renfermera ρ points correspondant à Ω, c'est-à-dire qu'une *surface d'ordre ρ correspondra à Ω*; ou encore, la surface f qui correspond à un plan quelconque passant par Ω se dé-

compose en deux surfaces, l'une fixe et d'ordre ρ, l'autre variable et formant un réseau d'ordre $n-\rho$, projectif au réseau des plans passant par Ω. Si le point Ω absorbe ρ' conditions pour la courbe Ξ, cette surface d'ordre ρ tiendra lieu d'une surface d'ordre ρ' dans la jacobienne des f; c'est-à-dire que ρ' sera un multiple de ρ, et *la surface d'ordre ρ correspondant à Ω devra être comptée $\rho':\rho$ fois dans la jacobienne des f.*

14. Par exemple, si Ω est un point (simple ou) multiple suivant un nombre λ pour les φ, et si ces surfaces n'ont pas en ce point (un plan tangent ou) un cône osculateur fixe, les ρ tangentes d'une courbe quelconque Ξ ne sont assujetties à aucune condition; dans ce cas, on a $\rho'=2\rho$; par suite, la surface d'ordre ρ correspondant à Ω doit être comptée deux fois dans la jacobienne des f. A une section plane de la surface d'ordre ρ correspond la série des points infiniment voisins de Ω d'une surface φ; cette série est projetée du point Ω par un cône d'ordre λ. Donc la surface d'ordre ρ correspondant à Ω est homaloïde, et les images de ses sections planes sont des courbes d'ordre λ.

15. Second exemple : Si Ω est un point simple pour les surfaces φ, et si ces surfaces ont entre elles, en ce point, un contact d'ordre $\rho-1$, on aura $\rho'=(\rho+1)\rho$; cela revient à dire que la surface d'ordre ρ correspondant à Ω sera comprise $\rho+1$ fois dans la jacobienne des f.

16. Soit Ω un point λ-ple pour les φ et ρ-ple pour les Ξ. Comme toute surface f correspondant à un plan passant par Ω se décompose en un lieu fixe d'ordre ρ et en une surface d'ordre $n-\rho$, à toute droite issue de Ω correspondra une courbe X' commune à une infinité de surfaces d'ordre $n-\rho$ et formant un faisceau. Les courbes X' sont de l'ordre $\rho-\lambda$, car c'est là le nombre des intersections autre que Ω d'une droite issue de ce point avec une surface φ; elles forment un système doublement infini, parce qu'elles correspondent aux droites qui passent par un point fixe. Une courbe X' est donc assujettie à $4(\rho-\lambda)-2$ conditions, car elle doit rencontrer en $4(\rho-\lambda)-2$ points l'ensemble des courbes fondamentales et des points fondamentaux de l'espace (x). A ces points

correspondront ceux où une droite quelconque menée par Ω coupe la jacobienne des φ en dehors de Ω. Si donc nous indiquons par π l'ordre de multiplicité du point Ω pour la jacobienne, nous aurons

$$4(\rho-\lambda)-2=4(\rho-1)-\pi,$$

d'où

$$\pi=4\lambda-2;$$

donc :

Un point fondamental de l'espace (ξ), λ*-ple pour toutes les surfaces* φ, *est* $(4\lambda-2)$*-ple pour la jacobienne des surfaces* φ.

17. Il résulte de ce qui précède que, s'il y a dans l'espace (x) une courbe fondamentale C_r d'ordre r et i-ple pour les surfaces f, il lui correspond une surface qui fait partie de la jacobienne des surfaces φ, et qui coupe toute surface φ suivant une des courbes fondamentales de l'espace (ξ) et suivant r courbes d'ordre i, qui correspondent aux points où C_r coupe un plan quelconque du premier espace. Réciproquement, la partie de la jacobienne des φ qui correspond (n° 13) à un point fondamental O de l'espace (x) n'aura aucune ligne commune avec une surface φ quelconque, à l'exception des courbes fondamentales de l'espace (ξ); car un plan quelconque de l'espace (x) ne passe pas par O.

18. Une transformation rationnelle n'est complétement déterminée que si l'on connaît pour chacun des deux espaces l'ensemble des courbes et des points fondamentaux, le système des surfaces homaloïdes φ ou f, et les différentes parties de la jacobienne correspondante. La transformation est définie quand on connaît le système homaloïdal et l'ensemble des lignes et des points fondamentaux; les autres éléments peuvent se déterminer au moyen des théorèmes que nous venons d'exposer.

Je vais faire voir maintenant comment on peut obtenir tous les systèmes homaloïdaux dont une surface donnée fait partie.

19. Soit φ_1 une surface homaloïde de degré r dont on connaît une représentation (point par point) sur un plan Π. Toutes les autres surfaces homaloïdes de degré r, ayant les mêmes points multiples et les mêmes lignes multiples que φ_1, couperont, en outre, cette surface suivant des lignes dont les images sur Π formeront un certain

système Σ. Prenons sur Π un réseau homaloïdal de courbes K, de manière que chacune de ces lignes, prise avec un lieu fixe Λ (un ensemble de lignes, que l'on peut même compter plusieurs fois), forme une courbe du système Σ. Une courbe K_1 formant avec Λ l'image de l'intersection de φ_4 avec une autre surface analogue φ_1, détermine un faisceau $\varphi_4 + \alpha_1\varphi_1$; de même, si K_2, K_3 sont deux autres courbes du réseau qui n'appartiennent pas au même faisceau que K_1, les deux faisceaux $\varphi_4 + \alpha_2\varphi_2$, $\varphi_4 + \alpha_3\varphi_3$ seront déterminés; et, comme les trois faisceaux ainsi obtenus ont une surface commune φ_4, ils déterminent un système linéaire triplement infini

$$\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \alpha_3\varphi_3 + \alpha_4\varphi_4 = 0,$$

qui est évidemment homaloïdal et peut, par suite, servir de base à une transformation rationnelle d'ordre ν (n° 3). Le degré des surfaces f, ou le degré de la transformation inverse, n'est autre chose que l'ordre des courbes de φ_4 dont les courbes K sont les images. Outre les points et les courbes multiples des surfaces φ, les lignes de φ_4 qui ont pour images sur Π le lieu Λ sont aussi *fondamentales*, c'est-à-dire communes à toutes les surfaces φ.

En faisant varier le lieu Λ et le réseau des courbes K de toutes les manières possibles, on obtiendra toutes les transformations dans lesquelles on peut employer la surface donnée φ_4.

20. Les courbes K sont les images sur Π des courbes Ξ (n° 4) qui se trouvent sur φ_4. Si une courbe Ξ se décompose, une des courbes partielles est commune à la jacobienne des φ (n° 6); mais, dans ce cas, ou bien la courbe K correspondante se décompose aussi, ou bien cette courbe a une branche de plus qui passe par un des points fondamentaux de l'image Π. Dans la première hypothèse, une des lignes composantes fait partie de la jacobienne du réseau des K; dans l'autre hypothèse, le point fondamental en question sera précisément l'image de cette partie de Ξ qui est commune à φ_4 et à la jacobienne des φ. Donc *les points fondamentaux de la représentation* Π *et les courbes qui forment la jacobienne des* K *constituent ensemble les images des courbes non fondamentales qui sont communes à* φ_4 *et à la jacobienne des* φ, *c'est-à-dire des courbes qui correspondent aux intersections des lignes fondamentales de l'espace* (x) *avec le plan correspondant à* φ_4.

Par suite, si aux points fondamentaux de Π et aux parties de la jacobienne des K correspondent, sur φ_4, λ_1 droites, λ_2 coniques,... λ_ρ courbes rationnelles d'ordre ρ,..., les surfaces f auront, en commun, une courbe simple d'ordre λ_1, une courbe double d'ordre λ_2,... une courbe ρ-ple d'ordre λ_ρ.... Le genre de ces courbes, leurs intersections, la décomposition de quelques-unes d'entre elles se manifesteront par des choix analogues dans les divers lieux géométriques qui composent la jacobienne des φ; et ces lieux se détermineront en examinant les conditions auxquelles sont assujetties les droites, les coniques,..., les courbes rationnelles d'ordre ρ,..., qui correspondent aux points fondamentaux de Π et aux lignes de la jacobienne des K.

Mais un exemple sera plus utile pour l'exposition de la méthode que toute autre considération. J'emploierai le symbole (ν, n) pour exprimer deux transformations inverses pour lesquelles les φ et les f sont respectivement de l'ordre ν, n [1].

(*A suivre.*)

[1] Les résultats des travaux de M. Cremona sur les transformations rationnelles dans l'espace ont été exposés devant l'Institut Royal Lombard dans les séances du 4 mars et du 1er juin 1871; une partie de ces résultats a été communiquée aussi à la Société des Sciences de Göttingue (*Nachrichten*, 1871, n° 5, et *Mathematische Annalen*, t. IV, p. 213). Le Mémoire de M. Noether : *Ueber die eindeutigen Raumtransformationen*, a été publié à la même époque (*Mathem. Annalen*, t. III, p. 547).

4 mai 1874.

Ed. Dewulf,

Chef de bataillon du Génie.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Jean (Ferd.). — Méthodes chimiques pour la recherche des falsifications, l'essai, l'analyse des matières fertilisantes. — Paris, Gauthier-Villars, 1874. In-18 jésus, 224 p. 3 fr. 50

Salvert (Fr. de). — Étude sur le mouvement permanent des fluides. Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris. — Paris, Gauthier-Villars, 1874. In-4, 50 p. 2 fr. 50

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

HRABÁK (J.), Professor von Maschinenkunde an der Bergakademie in Přibram. — GEMEINNÜTZIGES MATHEMATISCH-TECHNISCHES TABELLENWERK. Eine möglichst vollständige Sammlung von Hilfstabellen für Rechnungen mit und ohne Logarithmen. Nebst zeitensprechenden Maas-, Gewichts- und Geldrechnungs-Tabellen, insbesondere für das metrische und englische, österreichische und preussische Maas- und Gewichts-System. — Leipzig, Druck und Verlag von B.-G. Teubner, 1873 ([1]). — Pr. : 8 Mark (2 Thlr. 20 Ngr.).

Nous allons indiquer brièvement le contenu de cet utile Ouvrage, le mieux approprié que nous connaissions à l'usage des ingénieurs, des physiciens et des élèves des écoles industrielles.

Le Recueil se divise en deux Parties, dont la première contient les Tables destinées aux opérations de calcul en général, savoir :

I. Table des valeurs réciproques de tous les nombres de quatre chiffres. Ces valeurs sont données avec 6 figures. (20 p.)

II. Valeurs numériques des fonctions n^2, n^3, $\sqrt{n}$, $\sqrt[3]{n}$, $n\pi, \ldots$, pour les valeurs de n de 1,00 à 9,99, de 10,0 à 99,9, de 100 à 999. Table des puissances de 4 à 9 pour les nombres de 1,0 à 9,9. (52 p.)

III. Logarithmes vulgaires des 20000 premiers nombres, avec 6 décimales. Table de conversion pour les logarithmes. (40 p.)

IV. Logarithmes des lignes trigonométriques, de dix en dix secondes pour les deux premiers degrés, et de minute en minute pour le reste du quadrant (58 p.). Au lieu des différences tabulaires pour une seconde, il nous eût semblé préférable de donner les différences mêmes entre les logarithmes consécutifs.

V. Lignes trigonométriques naturelles, avec 6 figures, de minute en minute. (45 p.)

([1]) HRABÁK (J.), Professeur de machines à l'École des Mines de Přibram (Bohême). — Recueil de Tables usuelles, mathématiques et pratiques. Collection aussi complète que possible de Tables auxiliaires pour les calculs avec ou sans logarithmes. Avec des Tables pour les poids et mesures actuels et les calculs d'intérêts, en particulier pour la comparaison du système des poids et mesures métriques avec les systèmes anglais, autrichien et prussien. — Leipzig, Teubner; 1873. — 1 vol. grand in-8°, VIII-445 p.

VI. Circonférence et surface du cercle pour les valeurs du diamètre multiples de $\frac{1}{16}$, de $\frac{1}{8}$ et de $\frac{1}{12}$, jusqu'à 100 unités. (26 p.)

VII. Segments de cercle. Longueurs des arcs et de leurs flèches, cordes, aires des segments et des secteurs, pour le rayon $= 1$. Polygones réguliers de n côtés. (20 p.)

VIII. Tables de conversion. Parties duodécimales en fractions décimales ; fractions quelconques en fractions décimales, et réciproquement. (15 p.)

IX. Vitesse de chute pour les diverses hauteurs. (16 p.)

X. Moment statique, etc., valeurs de $\sqrt[4]{q}$. (12 p.)

XI. Facteurs simples des 1000 premiers nombres (non divisibles par 2 ou 5) ; plus petits diviseurs des 10000 premiers nombres. (5 p.)

XII. Nombres usuels avec leurs logarithmes.

La seconde Partie se compose des Tables pour les poids et mesures, et les calculs d'intérêts.

A. Mesures, poids et monnaies des divers pays. (12 p.)

B. Tables de comparaison des poids et mesures. (12 p.)

C. Tables pour la réduction des mesures métriques, autrichiennes, prussiennes et anglaises. (36 p.)

D. Formules de réduction pour les mesures métriques, autrichiennes, etc. (8 p.)

E. Tables de densités. (12 p.)

F. Tables des poids des barres, des plaques et des tuyaux métalliques. (28 p.)

G. Tables pour les calculs d'intérêt composé. (12 p.)

L'exécution typographique de ce Livre est des plus remarquables. Il est imprimé avec les chiffres anciens, adoptés actuellement pour les belles publications scientifiques, en Angleterre et en Allemagne, et dont nous avons hâte de voir revenir l'usage dans nos imprimeries françaises.

HEERR (Dr. Josef-Ph.), Professor der höheren Geodäsie und sphärischen Astronomie am K. K. Polytechnischen Institute zu Wien. — LEHRBUCH DER HÖHEREN MATHEMATIK. Zweite verbesserte Auflage. — Wien, Seidel & Sohn; 1872-1874. — 2 vol. in-8°, XVIII-518 et XII-560 p. Prix : 8 Thlr.

Cet Ouvrage se compose de trois Parties, dont les deux premières, formant le tome I, traitent de l'Analyse algébrique et de la Géométrie analytique à deux et à trois dimensions. La troisième Partie, contenue dans le tome II, a pour objet le Calcul différentiel et le Calcul intégral.

La première Partie, précédée d'une Introduction où sont exposées des généralités sur les fonctions, se divise en huit Chapitres, dont voici les titres : I. Des infiniment grands et des infiniment petits ; des limites des fonctions. — II. Des séries infinies en général. — III. Des quantités imaginaires et des fonctions algébriques de quantités imaginaires. — IV. Développement des fonctions en séries. — V. Des fonctions transcendantes de variables imaginaires. — VI. Théorie des équations algébriques. — VII. Sur les séries de différences et de sommes, les séries arithmétiques et l'interpolation des séries. — VIII. Convergence des produits infinis ; développement des sinus en produits infinis ; transformation des séries en fractions continues.

La théorie élémentaire des équations est traitée d'une manière très-complète. L'auteur expose entre autres la méthode de Horner pour le calcul approximatif des racines des équations numériques ; cette méthode, la plus expéditive de toutes, n'est peut-être pas aussi connue en France qu'elle le mériterait.

La deuxième Partie se divise en deux Sections : Géométrie analytique dans le plan, et Géométrie analytique dans l'espace.,

La Géométrie analytique dans le plan comprend sept Chapitres, traitant successivement des coordonnées et de leur transformation, de la ligne droite, du cercle, des courbes du second degré en général et de leurs espèces particulières, des coordonnées polaires, et de diverses courbes algébriques ou transcendantes.

La seconde Section est partagée en quatre Chapitres : Coordonnées dans l'espace ; Plan et ligne droite ; Généralités sur les surfaces courbes ; Surfaces du second degré.

Le second Volume, consacré au Calcul infinitésimal, se compose,

suivant la division traditionnelle, de deux Sections, l'une contenant le Calcul différentiel, l'autre le Calcul intégral.

Dans le premier Chapitre du Calcul différentiel, l'auteur expose les notions fondamentales et les théorèmes généraux sur la différentiation des fonctions d'une ou de plusieurs variables. Le Chapitre II traite des dérivées et des différentielles d'ordre quelconque, et de l'expression du rapport des accroissements de deux fonctions à l'aide d'une valeur moyenne du rapport de leurs dérivées. Le Chapitre III donne les séries de Taylor, de Maclaurin et de Lagrange, avec des applications. On trouve dans le Chapitre IV le calcul des valeurs limites des expressions présentant une indétermination apparente. L'auteur, au lieu d'invoquer pour cela le théorème de Taylor, aurait pu, avec plus d'exactitude, renvoyer à la formule qu'il a établie à la fin du Chapitre II. Le Chapitre V donne la théorie des maxima et des minima. Les trois derniers Chapitres ont pour objet les applications géométriques du Calcul différentiel aux courbes planes, aux courbes dans l'espace et aux surfaces courbes.

La Section qui contient le Calcul intégral se divise en cinq Chapitres, portant les titres suivants : I. Intégration des fonctions explicites d'une seule variable. — II. Des intégrales définies. Ce Chapitre se termine par la formule de Maclaurin ou d'Euler pour le calcul des quadratures approchées. — III. Application du Calcul intégral à l'évaluation des longueurs, des aires et des volumes. — IV. Suite de l'étude des intégrales définies. Séries périodiques de Fourier [1]. Intégrales de Fourier. Intégrales eulériennes. Logarithme intégral, sinus intégral, cosinus intégral. Intégrales elliptiques. — V. Intégration des équations différentielles. M. Herr traite avec assez de développement de l'intégration des équations différentielles linéaires par la méthode de Laplace et de Spitzer. L'intégration des équations aux dérivées partielles n'est pas exposée, ce nous semble, avec toute la rigueur et tous les éclaircissements désirables. L'Ouvrage ne contient rien sur le calcul des variations.

---

[1] L'auteur les appelle « séries de Fourier *ou de Lagrange.* » *Voir* à ce sujet l'historique de la question exposé par Riemann (*Bulletin*, t. V, p. 27).

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

MONTHLY NOTICES OF THE ROYAL ASTRONOMICAL SOCIETY OF LONDON (suite) (¹).

T. XXXIII; novembre 1872 à février 1873.

Airy (G.-B.). — *Sur le prochain passage de Vénus.*

L'Astronome Royal compare les avantages et les inconvénients des méthodes données par Halley et par De l'Isle.

La méthode de Halley n'exige point, en général, que l'on connaisse exactement la longitude du lieu d'observation : cela fut considéré au siècle dernier comme un grand avantage de cette méthode ; mais aujourd'hui le mouvement de la Lune est connu avec une telle approximation, que la détermination de la longitude n'offre plus aucune difficulté sérieuse ; trois mois suffiront certainement pour obtenir, dans chaque station, trente observations méridiennes et cent quarante observations extra-méridiennes, dont l'ensemble fera connaître la longitude à une seconde près. Avec une pareille approximation, on obtiendra certainement un résultat plus exact en appliquant la méthode de De l'Isle au calcul des observations du passage.

D'ailleurs, admettons que l'erreur probable du temps d'observation sur l'entrée et la sortie soit de $4^s,28$, comme l'a proposé autrefois M. Stone ; l'erreur probable sur l'heure absolue sera en secondes

$$\sqrt{1+(4,28)^2},$$

et l'erreur probable sur la comparaison des heures absolues des deux stations

$$\sqrt{2}\,\sqrt{1+(4,28)^2}.$$

Telle est l'erreur probable pour la méthode de De l'Isle ; mais l'erreur probable de l'intervalle de temps qui s'écoule entre l'entrée et la sortie, c'est-à-dire de la durée du passage à l'une des stations, est

$$\sqrt{2}\times 4,28,$$

(¹) Voir *Bulletin*, t. VI, p. 299.

et l'erreur probable dans la comparaison des durées observées aux deux stations

$$2 \times 4,28;$$

telle est l'erreur probable de la méthode de Halley.

Le rapport de ces deux erreurs est de 1,379.

Par conséquent, pour savoir quelles sont les stations où il convient d'appliquer la méthode de Halley ou celle de De l'Isle, il faut chercher quelles sont celles où l'*effet parallactique* obtenu par la méthode de Halley surpasse celui que donne l'application de la méthode de De l'Isle dans le rapport de 1 à 1,379. Or, pour les deux stations de Woahoo et île Crozet, qui ont été citées autrefois par M. Proctor comme types d'une application de la méthode de De l'Isle, l'effet parallactique est de $23^m,8$; par conséquent, nous arriverons à ce *criterium*, que, si la différence parallactique de durée entre deux stations surpasse $23^m,8 \times 1,379$, c'est-à-dire $32^m,8$, il vaudra mieux appliquer à la comparaison des observations des deux stations la méthode de Halley que celle de De l'Isle.

Appliquons ce critérium à trois stations boréales : Nertschinsk, Tientsin et Pékin, et à trois stations australes, Enderby, Crozet et Kerguelen. Nous aurons les résultats suivants :

Stations.	Effet parallactique.	Comparaison avec Enderby.	Comparaison avec Nertschinsk.
Nertschinsk...	$15^m,6$	$35^m,9$	
Tientsin......	13,4	33,7	
Pékin........	12,9	33,2	
Enderby......	20,3	»	$35^m,9$
Crozet.......	16,8	»	32,4
Kerguelen.....	16,6	»	32,2

La combinaison de Nertschinsk avec Enderby donne un nombre plus grand que le critérium; il faut donc combiner ces deux stations par la méthode de Halley; mais la combinaison de Nertschinsk avec les îles Crozet et Kerguelen donne un nombre inférieur au critérium; par conséquent, si l'observation à Enderby n'est pas *assurée,* les observations faites à Nertschinsk n'auront aucune valeur particulière, malgré la position très-boréale de cette station. La combi-

naison de Enderby avec Tientsin et Pékin donne un nombre à peine plus grand que le critérium; par conséquent encore, si l'observation de Nertschinsk n'est pas *assurée*, les observations faites à Enderby n'auront aucune valeur particulière, malgré la position australe de cette station.

Or Nertschinsk est une station de la Sibérie, à une haute latitude, fort élevée au-dessus du niveau de la mer; le climat doit donc y être franchement continental; mais, à Saint-Pétersbourg, le Soleil reste souvent pendant l'hiver invisible des semaines entières; il en sera donc probablement de même à Nertschinsk, et l'on doit considérer comme fort improbable la possibilité d'y faire une observation.

Quant à l'île d'Enderby, elle est fort peu connue; mais il est bien certain qu'une expédition se rendant dans cette contrée y rencontrera d'énormes difficultés et des conditions climatériques fort nuisibles aux instruments métalliques.

En conséquence, M. Airy se refuse à recommander l'envoi d'une expédition, soit à l'île d'Enderby, soit dans toute autre terre du continent antarctique.

PROCTOR (R.-A.). — *Remarques à propos de la Communication précédente.*

Admettant le critérium donné par M. Airy, quoique l'erreur $4^s,28$, proposée par M. Stone, lui paraisse trop considérable, M. Proctor applique ce critérium aux stations choisies par l'Astronome Royal. Il obtient ainsi les nombres donnés dans le tableau suivant :

Couple de stations.	Phase à observer.	Effet parallactique.	Nombre donné par l'application du critérium.
Woahoo............ / Rodriguez..........	Entrée.....	Acc. $11^m,2$ / Ret. $9,9$	$29^m,1$
Auckland (N.-Z.).... / Orsk (station russe).	Sortie.....	Acc. $8,5$ / Ret. $11,8$	$28^m,0$
Auckland (N.-Z).... / Alexandrie..........	Sortie.....	Acc. $8,5$ / Ret. $10,0$	$25^m,5$

La seule inspection de ces nombres suffit pour montrer que l'Astronome Royal s'est placé dans les cas les plus défavorables. En prenant, au contraire, Pékin et l'île de Kerguelen, on aurait eu, en

appliquant le critérium, $29^m,5$, résultat plus favorable qu'aucun des précédents.

En résumé, M. Proctor continue à penser que, si l'on veut appliquer la méthode de Halley, il faut occuper deux stations dans la région nord, pour observer les entrées accélérées et les sorties retardées; l'autre, dans la région sud, pour observer les entrées retardées et les sorties accélérées.

PROCTOR (R.-N.). — *Sur le passage de Vénus en* 1874.

Dans cette Note, M. Proctor se propose de démontrer que les difficultés qui rendront la méthode d'observation de Halley inapplicable au passage de 1882 n'existent pas pour celui de 1874.

DUNKIN (E.). — *Sur les valeurs du diamètre du Soleil et de Vénus données dans le Nautical Almanac de* 1874.

WILSON (J.-M.). — *Sur les taches de Vénus.*

Avec la lunette d'Alvan Clark de 8 pouces d'ouverture, dont dispose l'Observatoire de l'École de Rugby, M. Wilson a observé des taches sur la surface de Vénus.

TUPMAN (G.-L.). — *Résultats des observations d'étoiles filantes faites dans la Méditerranée pendant les années* 1869, 1870 *et* 1871.

M. Tupman, capitaine de l'Artillerie de la Marine anglaise, donne le Catalogue de 102 points radiants, dont les positions ont été déterminées par lui pendant ces trois années.

TUPMAN (G.-L.). — *Quelques observations sur les couleurs et les grandeurs des étoiles de l'hémisphère sud.*

Pendant son séjour à Montevideo, en 1864, le capitaine Tupman a noté avec soin les couleurs de toutes les étoiles visibles à l'œil nu entre le pôle sud et 60 degrés de distance polaire, et comparé, aussi exactement que possible, leurs grandeurs à celles qu'avait indiquées sir John Herschel, de 1836 à 1838. Il publie aujourd'hui le Catalogue de ses observations, où les étoiles sont classées par constellation et par ordre alphabétique dans chacune d'elles.

TUPMAN (G.-L.). — *Sur l'identité de la comète de Biela avec l'essaim météorique du* 27 *novembre.*

Les lignes de visée ou les *directions d'observations* indiquées par M. Pogson, pour ses observations des 2 et 3 décembre 1872,

passent tellement loin au nord de l'orbite connue de la comète de Biela, que la question de l'identification des nébulosités vues par M. Pogson avec la comète de Biela paraît encore douteuse à M. Tupman. Reprenant alors la position donnée par Al. Herschel pour le point radiant correspondant à l'orbite actuelle des météores du 27 novembre, il en a déduit les éléments de cette orbite et les a comparés à ceux de l'orbite de Biela. Il trouve ainsi :

	Essaim du 27 novembre.	Comète de Biela.
Passage au périhélie....	1872, déc. 26,90	1872, oct. 6,4
Longitude du périhélie......	111°. 48′	109°. 24′
Longitude du nœud ascendant.	245°. 57′	245°. 54′
Inclinaison.................	13°. 24′	12°. 34′
Log. distance périhélie.... .	9,8265	9,8718
Log. excentricité...........	9,7670	9,7600
Mouvement.................	direct.	direct.

Un changement de moins de 1 degré dans la position du point radiant conduirait, pour l'orbite de l'essaim, à des éléments identiques à ceux de l'orbite de la comète, tandis qu'une variation considérable dans la durée de la période ne produirait qu'un effet absolument insensible.

Il y a donc lieu d'admettre que les météores de la fin de novembre se meuvent le long de la même orbite que la comète de Biela.

De plus, après avoir prouvé l'impossibilité que M. Pogson ait observé deux corps différents, il ne reste, pour M. Tupman, d'autre conclusion que la suivante : ce qu'a vu M. Pogson n'est ni la comète de Biela, ni une agrégation météorique se mouvant suivant la même orbite, ni un corps qui ait passé près de la Terre le 27 novembre, et qui, par conséquent, serait en rapport avec les circonstances extraordinaires qui ont accompagné sa découverte.

Hind (J.-R.). — *État actuel du calcul relatif à la comète de Biela.*

On sait que les deux noyaux de la comète de Biela ont été observés dans l'automne de 1852, beaucoup plus loin qu'on ne s'y attendait de leurs positions calculées. Ce fait tenait à ce que, dans son calcul, Santini s'était servi d'un demi-grand axe dépendant seulement de la dernière apparition (1846), au lieu de celui qu'on aurait déduit de l'apparition de 1832 et transporté en avant par la grande per-

turbation de 1846 (¹). Depuis, les perturbations de 1852 à 1859 ont été calculées par Santini (M. Michez y a ajouté l'effet des perturbations de Saturne) et Challis, celles de 1852 à 1866 par M. Clausen, directeur de l'Observatoire de Dorpat, et celles de 1846 à 1858 par Hubbard, de l'Observatoire de Washington. Voici les résultats que trouvent ces savants pour l'époque du passage au périhélie (réduit au méridien de Greenwich), pour 1859.

S. F. Noyau de 1852.	mai	23,5559	Santini et Michez.
Noyau I. »	»	22,8149	Clausen.
Noyau II. »	»	24,0910	
Noyau I. »	»	23,0816	Hubbard (²).
Noyau II. »	»	24,4353	

Pour la période de 1859 à 1866, Michez a calculé aussi les perturbations de Jupiter, Saturne, la Terre et Vénus; Clausen et lui trouvent, pour époque du passage au périhélie en 1866 :

S. F. Noyau de 1852.	Janvier	26,3834	Michez.
Noyau I. »	»	25,5835	Clausen.
Noyau II. »	»	27,4607	

Il est donc bien évident qu'en tenant compte des causes connues de perturbation le passage au périhélie avait été fixé au 24 mai pour 1859, et au 26 janvier pour 1866. En 1859, la position de la comète dans le ciel rendait son observation peu probable; on n'a donc pas fait grande attention à ce fait, que personne ne l'avait observée. Pour le retour de 1866, il n'en a pas été de même; tout le monde se rappelle les efforts immenses, mais infructueux, faits par un grand nombre d'astronomes pour la retrouver; M. Otto Struve l'a cherchée avec le grand équatorial de Poulkova, trois ou quatre nuits chaque mois, depuis septembre jusqu'à la fin de l'année; D'Arrest avec le bel équatorial de l'Observatoire de Copenhague, pendant plus de

(¹) *Sulla cometa periodica detta di Biela. — Atti dell' Istituto Veneto di Scienze*, 26 novembre 1854.

(²) Hubbard admet que le noyau *principal*, en 1846, est identique à celui qui a précédé en 1852; Clausen, Santini et Michez paraissent avoir adopté l'opinion contraire. Quant à Hubbard, il pense que la question ne peut être résolue par les quelques observations faites en 1852.

vingt nuits, à partir d'août 1866; le P. Secchi avec l'équatorial de Merz, du Collége Romain, équatorial qui lui a servi à découvrir tant de nébuleuses non indiquées dans les Catalogues des Herschel ; M. Bruhns, à Leipzig, pendant vingt nuits au moins, tant avant qu'après le passage au périhélie ; M. Weiss à Vienne, pendant plus d'une belle nuit de novembre à février ; M. Warren de la Rue a sondé le ciel avec son puissant télescope, de chaque côté des positions indiquées : M. Barber, de Spondon, Derby, avec un équatorial de 8 pouces, et M. Hind lui-même, avec l'équatorial de 7 pouces de M. Bishop, l'ont aussi cherchée assidûment; mais personne ne l'a rencontrée : il est donc bien clair que la comète n'a pas passé à son périhélie dans un intervalle de plusieurs semaines aux environs de l'époque indiquée.

Pour la révolution de 1866 à 1870, personne, du moins à la connaissance de M. Hind, n'a encore entrepris le calcul des perturbations.

D'un autre côté, lors de l'averse météorique du 27 novembre 1872, M. Klinkerfues a émis l'hypothèse, depuis généralement admise, que l'un des corps qui composent la comète a, cette nuit-là, rencontré la Terre à son nœud descendant. Il en résulte nécessairement, puisque l'arc d'anomalie vraie qui sépare le nœud descendant du périhélie est parcouru en 30,3 jours, que le passage de la comète à son périhélie a eu lieu un peu après minuit, le 27 décembre; mais alors, entre l'apparition de 1852 et celle-là, il y a trois révolutions moyennes de 6,754 années; ce qui placerait le passage au périhélie de 1866 environ au 28 mars, six à huit semaines avant l'époque prédite. Il n'y aurait alors rien d'étonnant qu'en 1866 la comète ait passé inaperçue.

Hind (J.-R.). — *Sur la prochaine réapparition de la comète de Brorsen.*

Plummer (W.-E.). — *Éphémérides pour la Comète de Tempel à courte période.* (1867, II.)

Glaisher (W.-L.). — *Sur l'exactitude des Tables de logarithmes.*

M. Glaisher donne une liste d'erreurs qui affectent les sept premières décimales d'un certain nombre (123) de logarithmes de l'*Arithmetica logarithmica* (Gouda, 1628) de Vlacq, et, comparant ensuite les Tables de logarithmes publiées depuis cette époque,

montre que ces erreurs ont disparu peu à peu, si bien que dans les Tables de Bremiker (1857), Schrön (1860), et Callet (1862, revues par Dupuis), aucune d'elles ne se rencontre plus.

Plummer (J.-J.). — *Sur la projection apparente des étoiles sur le disque de la Lune au moment de l'occultation.*

Proctor (R.-A.). — *Remarque sur la Communication précédente.*

Burnham (S.-W.). — *Catalogue de quatre-vingt-une étoiles doubles, découvertes avec l'équatorial de* 6 *pouces* (d'Alvan Clark) *à l'Observatoire de Chicago* (*U.-S.*).

Il est remarquable que, malgré les nombreuses recherches faites antérieurement sur ce sujet, et qui embrassent plus de huit mille étoiles doubles différentes, visibles à la latitude de Chicago, M. Burnham ait pu découvrir, avec un objectif d'une puissance relativement faible, quatre-vingt-une étoiles doubles nouvelles dont quelques-unes lui ont paru, d'ailleurs, d'une observation très-facile. Ce fait est une nouvelle preuve de l'excellence des objectifs qui sortent des ateliers de MM. Clark.

Williams (J.). — *Observations de taches solaires faites en Chine.*

Il résulte des documents contenus dans l'Encyclopédie de *Ma-Twan-Lin,* que les astronomes chinois avaient constaté l'existence de taches sur la surface du Soleil bien avant les astronomes européens. Sir John Herschel dit en effet, dans ses *Outlines of Astronomy,* qu'avant la découverte des lunettes on avait observé deux fois l'existence de ces taches : or le *Wan-Heen-Tung-Kao* (tel est le titre de l'Encyclopédie dont nous avons parlé plus haut) rapporte quarante-cinq observations de taches solaires antérieures à cette époque, et décrit toutes leurs apparences et leurs variations avec autant de soin que les Schwabe, les R. Wolf et les Carrington l'ont fait de nos jours. Ajoutons d'ailleurs que les observations du Soleil sont suivies aujourd'hui par les astronomes du Céleste Empire avec la même persévérance qu'autrefois, et qu'au point de vue de l'histoire des sciences, en général, et du développement intellectuel dans l'empire chinois, cette Encyclopédie renferme des documents du plus haut intérêt.

WILSON (J.-M.). — *Étude géométrique de l'orbite d'une étoile double.*

Cette étude est la traduction géométrique des beaux travaux analytiques d'Herschel, sur le même sujet, insérés dans le volume V des *Mémoires de la Société Royale Astronomique de Londres.*

PROCTOR (R. A.). — *Sur le prochain passage de Vénus en* 1874.

M. Proctor insiste sur le danger qu'il y aurait à ne pas avoir un nombre suffisant de stations dans l'hémisphère austral. En effet, à l'île Kerguelen, le temps sera très-probablement mauvais; il en est de même pour l'île Crozet. Les observations de la Tasmanie et de l'Australie méridionale n'ont pas grande valeur théorique. Il ne reste donc, parmi les stations désignées, que les îles Rodriguez, Bourbon et Maurice pour les entrées retardées et la Nouvelle-Zélande pour les sorties accélérées.

JOHNSON (S.-J.). — *Sur les éclipses notées dans les chroniques anglo-saxonnes.*

WATERS (S.). — *Sur la distribution des nébuleuses résolubles et irrésolubles.*

FORBES (G.). — *Sur l'averse météorique du* 27 *novembre* 1872.

PROCTOR (R.-A.). — *Note adressée aux astronomes des États-Unis sur le passage de Vénus, le* 8 *décembre* 1874.

M. Proctor engage les astronomes américains à choisir un certain nombre de stations dans les régions antarctiques, comme les terres d'Enderby, de Sabrina, d'Adélie et l'île de la Possession, régions qu'ont presque entièrement négligées les astronomes européens.

STRUVE (O.). — *Liste des stations choisies par les astronomes russes pour l'observation du passage de Vénus, en* 1874.

PLUMMER (J.-J.). — *Sur la figure et le diamètre de Vénus.*

D'après M. Plummer, la valeur du diamètre de Vénus adoptée dans le *Nautical Almanac* (16",61 à l'unité de distance) est trop petite. Cette valeur est celle qu'Encke a déduite des observations du passage de Vénus en 1761.

En 1868, M. Main, à Oxford, et M. Plummer, à Durham, firent une série d'observations en vue de déterminer ce diamètre; mais

les observations furent assez discordantes, et M. Plummer annonce qu'il recommence actuellement ses observations, et demande à la Société Royale Astronomique de recommander à certains observateurs du passage de Vénus, munis d'héliomètres ou même de micromètres à double image, d'Airy, de déterminer le diamètre de Vénus, pendant le passage de cet astre sur le disque du Soleil.

ELYER (T.-G.). — *Observation de la planète Vénus.*

PERRY (S.-J.). — *Phénomènes des satellites de Jupiter.*

C'est une liste d'observations de ces phénomènes faites à Stonyhurst, avec une lunette achromatique de 8 pouces (20 centimètres) d'ouverture, due à Troughton et Simms, et armée d'un grossissement de trois cents fois.

STRUVE (O.). — *Observations de l'étoile double Procyon.*

Pendant ces vingt-deux dernières années, M. O. Struve a fait chaque année une ou deux comparaisons de cette étoile avec deux étoiles télescopiques situées de part et d'autre à 6 minutes en ascension droite, en vue de recueillir des matériaux qui puissent servir à confirmer la théorie par laquelle Bessel explique les irrégularités de son mouvement. Le 19 mars, par une atmosphère exceptionnellement favorable, il a découvert à peu de distance de Procyon, et à peu près sur le même parallèle, un point faiblement lumineux. Après s'être assuré que cet objet était également visible dans toutes les portions du champ et avec les différents grossissements, M. Struve le compara micrométriquement avec les petites étoiles, et trouva $86°,8$ pour l'angle de position et $11'',68$ pour la distance des deux astres. Quant à la grandeur de ce point lumineux, que nous appellerons désormais le compagnon de Procyon, l'astronome de Poulkova l'a estimée inférieure de deux unités à celle du compagnon de Sirius. Depuis, les observations sur le compagnon de Procyon n'ont plus été interrompues, et l'on a constaté des variations continues dans la position de ce compagnon.

STEPHAN (E.).—*Nouvelles nébuleuses découvertes à l'Observatoire de Marseille.*

M. Stephan donne la liste des positions de soixante-quinze nébuleuses découvertes par lui à l'Observatoire de Marseille, avec son grand télescope de $1^{m},20$ d'ouverture.

Perry (S.-J.). — *Micromètre de passage enregistreur.*

Russell (H.-C.). — *Recherches de Vulcain.*

Sur l'invitation de M. Hind, M. Russell, directeur de l'Observatoire de Sydney (Nouvelle-Galles du Sud), a recherché cette planète problématique, avec son réfracteur de $7\frac{1}{4}$ pouces ($0^{m},184$) d'ouverture, tous les jours, depuis le 21 mars jusqu'à la fin du même mois ; mais ses efforts n'ont pas abouti, et jamais il n'a vu sur la surface du Soleil autre chose que des taches de forme et de dimension diverses.

Burnham (S.-W.). — *Second Catalogue d'étoiles doubles.*

M. Burnham soumet à un examen soigné un Catalogue complet d'étoiles doubles. De ce Catalogue, qu'il espère publier à part, il détache aujourd'hui une seconde liste de vingt-quatre étoiles doubles qu'il n'a trouvées indiquées dans aucun Catalogue, et que les excellentes qualités optiques de l'objectif de 6 pouces (15 centimètres) d'ouverture d'Alvan Clark, qu'il a à sa disposition, lui ont permis d'observer.

Glaisher (J.-W.-L.). — *Sur les Tables de logarithmes.*

Wilson (J.-M.). — *Éléments de l'orbite de l'étoile* Σ 1938 (μ^2 *Bouvier*).

Proctor (R.-A.). — *Sur la méthode des jauges d'étoiles.*

M. Proctor donne des instructions, en vue d'une observation uniforme, aux observateurs qui ont résolu de participer à son relevé systématique de toutes les étoiles du ciel.

Hall (Asaph). — *Sur la détermination des longitudes par les culminations lunaires.*

A l'approche du passage de Vénus, phénomène dont l'observation exigera la détermination des longitudes d'un certain nombre de stations par la méthode des culminations lunaires, M. Hall a cru utile de comparer les résultats donnés par cette méthode avec ceux que donnent les autres.

Il paraît évident qu'en augmentant suffisamment le nombre des passages de la Lune, que l'on fait servir à la détermination de la différence de longitude de deux stations, on peut réduire l'erreur de la longitude à être aussi petite qu'une quantité donnée. En effet, dans presque toutes les déterminations de longitude par les culmi-

nations lunaires, où l'on a employé un grand nombre de culminations de cet astre, l'erreur probable du résultat (calculée à la manière ordinaire) n'est qu'une petite fraction de la seconde; mais les déterminations télégraphiques des longitudes des mêmes points montrent, dans les anciennes déterminations, des erreurs de deux, trois et même quatre secondes de temps. Ainsi, la longitude de San-Francisco, déterminée par 206 culminations de la Lune, a été trouvée en erreur de *quatre* secondes; mais l'expérience la plus décisive à cet égard est la détermination de la différence de longitude entre l'Europe et l'Amérique.

Les trois déterminations de la différence de longitude entre Greenwich et Washington, faites par le câble transatlantique, donnent en moyenne pour cette différence

$$5^h\,8^m\,12^s,2.$$

La méthode des culminations lunaires avait donné les résultats suivants :

Observateurs.	Nombre des culminations.	Différence de longitude.	Erreur.
		h m s	s
Loomis....	150	5.8.9,3	— 2,9
Gillis.......	394	10,0	— 2,2
Walker		9,6	— 2,6
Newcomb ..	279	11,6	— 0,6
Newcomb ..	163	9,8	— 2,4

Dans la dernière détermination, M. Newcomb s'était servi des observations de 1862 et 1863, toutes enregistrées électriquement tant à Washington qu'à Greenwich.

En 1855 et 1856, MM. Bond et Peters essayèrent de déterminer, par les culminations de la Lune, la différence de longitude entre l'observatoire d'Harvard College (Cambridge, U.-S.) et celui de Claverden. Pour augmenter la précision, ils observaient, au lieu du passage du bord de l'astre, celui du bord d'une tache bien limitée, *Messier*; ils trouvèrent que ces observations se faisaient avec la même exactitude que celle du passage d'une étoile; et obtinrent pour différence de longitude,

$$3^s,54,$$

tandis que la triangulation avait donné

$$1^s,65;$$

ici encore une erreur de 2 secondes.

Si l'on compare les résultats des expéditions chronométriques faites par Struve, Airy et Bond avec ceux des déterminations télégraphiques, on trouve pour différence entre Greenwich et Whasington.

1849-185	$5^h.8^m.11^s,6$	$-0^s,6$
1851	11,9	−0,3
1852	13,0	+0,8

La méthode chronométrique paraît donc aussi plus exacte que la méthode des culminations lunaires.

Ajoutons d'ailleurs que les occultations d'étoiles par la Lune et les éclipses de Soleil donnent aussi des valeurs de la différence de longitude plus petite que la valeur télégraphique.

Tennant (R.-E.). — *Note sur les photographies du Soleil obtenues à Batavia, par M. Oudemans, pendant l'éclipse des* 11-12 *décembre* 1871.

Burton (C.-E.). — *Observations des phénomènes du quatrième satellite de Jupiter, faites pendant les années* 1871, 1872 *et* 1873.

Cette Note signale les apparences irrégulières sous lesquelles se présente assez fréquemment le quatrième satellite pendant son passage sur le disque de la planète. Ces faits avaient déjà été remarqués par M. Dawes ([1]).

Browning (J.). — *Sur la disparition de la bande équatoriale colorée de Jupiter.*

Lynn (W.-T.). — *Sur la masse de Jupiter.*

A l'aide des nouvelles observations faites depuis 1866 sur la planète Thémis, M. Lynn a corrigé la valeur qu'il avait alors obtenue pour la masse de Jupiter et a trouvé que, celle du Soleil étant 1, la masse de Jupiter était égale à

$$\frac{1}{1047,358}.$$

([1]) *Monthly Notices*, t. XX, p. 246 et 247.

La dernière détermination faite par M. Airy à l'aide du mouvement des satellites donnait

$$\frac{1}{1046,770}.$$

Bessel avait obtenu de la même manière

$$\frac{1}{1047,879}.$$

A l'aide des observations de satellites faites par lui à Madras, en 1857, le capitaine Jacob avait trouvé

$$\frac{1}{1047,540};$$

les observations de la comète de Faye avaient conduit M. Möller à la valeur

$$\frac{1}{1047,788}.$$

La différence entre la plus grande et la plus petite de ces valeurs était de $\frac{1}{1000}$ de la valeur moyenne : on doit considérer la masse de Jupiter comme actuellement bien déterminée.

Knobel (E.-B.). — *Note sur Mars.*

M. Knobel communique à la Société dix-sept dessins de Mars pris pendant l'opposition de 1873 avec un télescope du 8 $\frac{1}{2}$ pouces ($0^m,22$) d'ouverture, monté comme un altazimut et d'ailleurs d'excellente qualité. L'un des résultats les plus saillants qu'il aurait obtenus serait la constatation de la non-uniformité de la teinte de la mer de Kaiser, déjà soupçonnée par plusieurs observateurs.

Christie (W.-H.). *Sur un micromètre enregistreur.*

Ce n'est autre chose qu'un nouveau modèle du pointeur, dont sont actuellement munis les tambours de la vis de déclinaison de la plupart des grands instruments méridiens.

Herschel (A.). — *Positions des points radiants du météore du 27 novembre 1872.*

M. Herschel donne la liste de 77 positions données par les observations, pour le point radiant de cette averse météorique.

MARTH (A.). — *Éphéméride des cinq satellites intérieurs de Saturne.*

M. Morth donne les éphémérides de Mimas, Enceladus, Téthys, Diane et Rhéa, du 13 juin au 18 octobre 1873.

MARTH (A.). — *Seconde liste des coordonnées des étoiles de la Voie lactée ou qui en sont voisines.*

Les coordonnées publiées dans cette Note sont surtout déduites des positions indiquées par Heis dans son *Atlas cœlestis novus.*

GARBETT. — *Sur une nouvelle méthode d'observation des passages de Vénus.*

M. Garbett propose de déterminer la distance de Vénus au centre du Soleil, à l'époque du milieu du passage, au moyen de plusieurs épreuves photographiques prises durant un court intervalle, avant et après cette époque. La meilleure station pour l'application de cette méthode, celle où l'effet parallactique sur l'instant du milieu du passage serait le plus grand, serait l'île Bouvet, au sud-ouest de la ville du Cap.

PROCTOR (R.-A.). — *Cartes des stations antarctiques et sous-antarctiques, favorables à l'observation du passage de Vénus en* 1874.

PROCTOR (R.-A.). — *Vues d'ensemble sur le monde sidéral.*

M. Proctor compare et discute les théories de W. Herschel et de W. Struve.

PROCTOR (R.-A.). — *Sur la durée de la rotation de Mars.*

Dans les *Annales de l'Observatoire de Leyde,* pour 1872, M. Kaiser a publié un certain nombre de Mémoires sur la planète Mars, où il donne comme valeur de la durée de la rotation de cette planète $24^h 37^m 22^s,62$.

En reprenant la comparaison des observations modernes de la planète avec les anciennes observations de Hooke (1666) et de Huygens (1672), M. Proctor montre que la véritable valeur de la durée de la rotation doit être comprise entre

$$24^h 37^m 22^s,71$$

et

$$24^h 37^m 22^s,72.$$

WATERS (S.). — *Distribution des nébuleuses et des amas d'étoiles.*

En représentant graphiquement l'ensemble des nébuleuses et amas catalogués par sir J. Herschel, M. Sydney Waters arrive à constater que, d'une part, les nébuleuses résolubles et les nébuleuses irrésolubles occupent dans le ciel les mêmes positions apparentes, et qu'en outre la plupart des amas d'étoiles sont rassemblés dans le voisinage de la Voie lactée, et paraissent au premier abord en faire partie.

Il semble résulter de là que non-seulement les amas particuliers à la Voie lactée doivent être considérés comme liés aux nébuleuses qui paraissent former un système distinct, mais que ces deux systèmes sont probablement deux parties dépendantes de notre système sidéral.

PLUMMER (J.-J.). — *Mesure du diamètre de Vénus.*

Depuis le 18 février jusqu'au 22 juillet 1873, lors de la derniere conjonction inférieure de Vénus, M. Plummer a fait à l'Observatoire de Durham une série de mesures du diamètre de la planète. Il se servait d'un micromètre à double image d'Airy, d'un grossissement de 113 fois, et ne faisait de mesure que si l'image de la planète était tout à fait calme. Il a obtenu ainsi, à l'aide de vingt-six jours d'observations, pour valeur du diamètre de la planète à la distance 1, le nombre

$$17'',321$$

avec une erreur probable de

$$\pm 0'',046.$$

TENNANT. — *Sur la détermination des longitudes au moyen des distances zénithales de la Lune.*

Deux règles ont été données pour faire ces observations : 1° dans une instruction envoyée aux officiers du *North American Boundary Survey*, l'Astronome Royal recommande d'observer la Lune à 6 heures de temps sidéral ; 2° M. Chauvenet, dans son Ouvrage d'Astronomie, dit, au contraire, d'observer la Lune au moment de son passage dans le premier vertical.

On ne trouve nulle part raison de cette contradiction, et le lieutenant-colonel Tennant demande aux auteurs de ces deux règles des explications à ce sujet.

BURNHAM (W.-S.). — *Erreurs et omissions du Catalogue d'étoiles doubles de sir William Herschel.*

STONE (E.-J.). — *Sur le résultat le plus probable qu'on puisse déduire d'un grand nombre de déterminations directes auxquelles on suppose la même valeur.*

Soient $x_1, x_2, \ldots$ n mesures directes de la même quantité, chacune d'elles étant, par hypothèse, également bonne en apparence et également probable. Nous admettrons comme un axiome que, dès lors, la valeur la plus probable est celle à laquelle chaque mesure a contribué également ; de cette manière les erreurs positives et négatives doivent être considérées comme également probables, et leurs sommes être séparément égales, c'est-à-dire la somme totale être nulle. Et, pour obtenir cette valeur la plus probable, nous devrons combiner toutes les mesures indépendantes, de telle sorte qu'une erreur qui peut exister dans une des mesures, x_1 par exemple, produise la même erreur dans la « valeur adoptée comme la plus probable », comme elle serait produite par la même erreur sur $x_2, x_3, \ldots, x_n$.

En effet, la différence probable entre chaque mesure et le résultat vrai est la même ; et, ceci étant, il n'y a pas de raison pour adopter une valeur dans laquelle une erreur (ou une variation arbitraire) de x_1 produirait une erreur (ou une variation arbitraire) moindre ou plus grande que la même erreur (ou variation arbitraire) sur x_1, $x_2, \ldots, x_n$. Cette condition d'égale influence de toutes les mesures isolées paraît donc nécessaire et suffisante.

Soit maintenant

$$u = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

la valeur adoptée comme la plus probable ; puisque des erreurs (ou des variations) égales de u sont produites par la même erreur (ou variation) de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, les dérivées partielles de u doivent évidemment satisfaire aux équations

$$\frac{du}{dx_1} = \frac{du}{dx_2} = \frac{du}{dx_3} = \cdots = \frac{du}{dx_n},$$

$$\frac{d^2u}{dx_1^2} = \frac{d^2u}{dx_2^2} = \frac{d^2u}{dx_3^2} = \cdots = \frac{d^2u}{dx_n^2},$$

d'où

$$\frac{d^2u}{dx_1\,dx_2} = \frac{d^2u}{dx_1^2} = \frac{d^2u}{dx^2} = \cdots,$$

et par suite, en général,

$$\frac{d^{r+s}u}{dx_1^r dx_2^s} = \frac{d^{r+s}u}{dx_1^{r+s}} = \frac{d^{r+s}u}{dx_2^{r+s}} = \ldots.$$

Posons

$$x_1 = a_1 + h_1,\ x_2 = a_2 + h_2, \ldots, x_n + a_n + h_n.$$

Nous aurons

$$u = \varphi(a_1, a_2, \ldots, a_n) + \left(h_1 \frac{du}{dx_1} + h_2 \frac{du}{dx_2} + \ldots\right) + \ldots,$$

où l'on doit remplacer, dans u, x_1, x_2, ... par a_1, a_2, ...

Mais, par suite des conditions qui précèdent, cette relation devient

$$a = \varphi(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (h_1 + h_2 + \ldots + h_n)\frac{du}{dx_1}$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{(h_1 + h_2 + \ldots + h_n)^2}{u_2}\frac{d^2u}{dx_1^2} + \ldots$$
$$+ \frac{(h_1 + h_2 + \ldots + h_n)^r}{1.2\ldots r}\frac{d^r\varphi(a_1 + \theta h_1, \ldots, a_n + \theta h_n)}{dx_1^r},$$

où θ est un nombre moindre que l'unité.

Posons

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = s = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n),$$

alors

$$x_1 = s + h_1, \quad x_2 = s + h_2, \ldots, \quad x_n = s + h_n;$$

mais

$$h_1 + h_2 + \ldots + h_n = 0;$$

donc

$$u = \varphi(s, s, \ldots, s) = F(s),$$

c'est-à-dire que u est tout simplement une fonction de la moyenne arithmétique des mesures effectuées.

Nous ne pouvons donc adopter pour u une valeur qui dépende également des différentes mesures $x_1, x_2, \ldots, x_n$, sans qu'elle puisse être exprimée par une fonction de la moyenne arithmétique.

Or, dans le cas de deux mesures, nous savons que la valeur la plus probable est la moyenne arithmétique, car il n'y a évidemment pas plus de raison pour adopter une valeur plus voisine de x_1 que de x_2 ; admettons donc que cette règle soit vraie pour n mesures et cherchons si elle est encore vraie pour $(n + 1)$ mesures.

Nous avons par hypothèse

$$F\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}.$$

Or

$$F\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{n+1}}{n+1}\right)=F\left(\frac{ns+x_{n+1}}{n+1}\right)=F\left(s+\frac{x_{n+1}-s}{n+1}\right),$$

valeur qui, développée, devient

$$F(s)+\frac{x_{n+1}-s}{n+1}F'(s)+\frac{1}{1.2}\left(\frac{x_{n+1}-s}{n+1}\right)^2F''(s)+\ldots;$$

mais, par hypothèse,

$$F(s)=s,\quad F'(s)=1,\quad F''(s)=0,\ldots,$$

d'où

$$F\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{n+1}}{n+1}\right)=s+\frac{x_{n+1}-s}{n+1}$$
$$=\frac{x_1+x_2+\ldots x_{n+1}}{n+1}.$$

La loi est donc entièrement générale, et *la valeur la plus probable* qui puisse être déduite de n mesures *indépendantes* est leur *moyenne arithmétique,* toutes les fois que l'on peut admettre pour chacune de ces mesures le *même degré de probabilité.*

Newcomb (S.). — *Représentation mécanique d'un problème usuel.*

Étant données les valeurs observées à différentes époques d'une quantité qui varie proportionnellement au temps, trouver par la méthode des moindres carrés les valeurs les plus probables des deux constantes qui déterminent sa valeur à une époque donnée. Tel est l'un des problèmes les plus fréquents que les astronomes aient à résoudre, et dont la correction de l'ascension droite ou de la déclinaison d'une étoile au moyen de toutes les observations que l'on possède d'elles est un exemple très-simple.

Ce problème peut se représenter mécaniquement, comme il suit, au moyen d'abscisses proportionnelles au temps et d'ordonnées proportionnelles aux grandeurs de la quantité variable. Marquez-en

sur un plan les différentes valeurs ; supposez maintenant qu'une barre rigide soit attirée par chacun de ses points avec une force proportionnelle au produit du poids de l'observation correspondante et de la distance du point à la barre attirée ; alors :

1° La position d'équilibre de la barre correspondra à la valeur la plus probable de la quantité variable ; les distances de chaque point à cette position de la droite seront proportionnelles aux erreurs résiduelles des observations.

2° Le poids du résultat à une époque donnée sera mesuré par la résistance que la barre offre à la pression au point correspondant à cette époque, ou encore par le poids de l'observation dont l'attraction est égale à la force avec laquelle la barre résiste à la pression.

3° Le point de plus grand poids, c'est-à-dire l'erreur la moins probable, sera celui où l'application d'une force ferait mouvoir la barre parallèlement à elle-même, ou celui autour duquel la barre tournerait sous l'action d'un couple.

4° Pour trouver l'influence relative des différentes observations, sur la détermination de la valeur de la quantité variable, calculée pour une époque, appliquez une pression à la barre, au point correspondant à cette époque. L'observation correspondant au point autour duquel la barre tournera par l'action de cette pression sera sans influence sur les résultats, et l'influence d'une observation quelconque sera proportionnelle à la distance de son époque à ce point.

5° Les points de pression et de rotation sont *conjugués,* c'est-à-dire que, si une pression en P fait tourner la barre autour de Q, une pression en Q fera tourner la barre autour de P. Ceci correspond à cette proposition logique, que, si l'on admet l'hypothèse qu'une étoile à une époque P déterminée est sans influence sur l'ascension droite que peut avoir l'étoile à l'époque Q, de même un changement quelconque sur la valeur de l'ascension droite de l'étoile à l'époque Q ne peut avoir d'influence sur la valeur de l'ascension droite de cette étoile à l'époque P.

C. A.

PROCEEDINGS of the Royal Society of London. — Printed by Taylor and Francis, London ([1]).

T. XVIII; 1869-1870.

Sabine (E.). — *Résultats de la première année d'emploi des instruments photographiques enregistreurs de Météorologie à l'Observatoire central du système anglais d'observations météorologiques.* (9 p.)

Haughton (S.). — *Sur quelques principes élémentaires de Mécanique animale;* Nos II, III, IV, V. (10 p.)

Andrews (W.). — *Sur la continuité des états gazeux et liquide de la matière.* (3 p.)

Shanks (W.). — *Quatrième et dernière Note supplémentaire sur le calcul de la valeur numérique de la constante d'Euler.*

Herschel (le capitaine). — *Observations spectroscopiques sur les protubérances solaires.* (2 art., 4 p.)

Russell (W.-H.-L.). — *Sur la description mécanique des courbes.* (2 p.)

Description d'un appareil servant à construire des expressions de la forme

$$a \sin(m\theta + \alpha) + b \sin(n\theta + \beta) + \ldots.$$

Lockyer (J.-N.). — *Observations spectroscopiques du Soleil.* (2 art., 10 p.)

Frankland (E.) et Lockyer (J.-N.). — *Recherches sur les spectres gazeux, se rattachant à la constitution physique du Soleil, des étoiles et des nébuleuses.* (3e Note.)

Rankine (M.). — *Sur la théorie thermodynamique des ondes d'une perturbation longitudinale finie.* (2 art.)

Russell (W.-H.-L.). — *Sur les équations différentielles linéaires.* (art. I-II, 4 p.)

Dans le premier article, l'auteur établit les conditions pour qu'une

([1]) Il paraît chaque année neuf fascicules in-8°, formant un volume.

équation différentielle linéaire du second ordre

$$(\alpha + \beta x + \gamma x^2) u'' + (\alpha' + \beta' x + \gamma' x^2) u' + (\alpha'' + \beta'' x + \gamma'' x^2) u = 0$$

admette une intégrale de la forme $e^{\int \varphi dx}$, φ étant une fonction rationnelle de x. Il remarque que la même méthode s'applique aussi à l'équation du troisième ordre

$$(\alpha + \beta x + \gamma x^2) u''' + \ldots + (\alpha''' + \beta''' x + \gamma''' x^2) u = 0,$$

ainsi qu'à toutes les équations différentielles linéaires du second et du troisième ordre.

Dans le second article, il applique sa méthode à l'intégration d'une équation différentielle dont la solution peut se mettre sous la forme $\frac{P}{Q} e^{\omega}$, où P, Q, ω sont des fonctions rationnelles et entières de x.

Cayley (A.). — *Sur la Géométrie abstraite.* (1 p.)

Stone (E.-J.). — *Déterminations approximatives du pouvoir calorifique d'Arcturus et de α de la Lyre.* (6 p.)

La chaleur fournie par Arcturus, à Greenwich, pour une hauteur de 25 degrés, est, d'après les premières recherches de l'auteur, à peu près la même que celle que donnerait un cube de 3 pouces de côté, rempli d'eau bouillante, à une distance de 400 yards. Pour α de la Lyre, à la hauteur de 60 degrés, la chaleur serait celle que fournirait le même cube placé à 600 yards.

Jevons (W.-St.). — *Sur l'exécution mécanique des déductions logiques.* (3 p.)

Proctor (R.-A.). — *Note préliminaire sur certains mouvements d'ensemble des étoiles.* (3 p.)

Todhunter (I.) — *Sur le théorème de Jacobi concernant l'équilibre relatif d'un ellipsoïde fluide animé d'un mouvement de rotation, et sur la discussion d'Ivory touchant ce théorème.*

L'auteur signale des erreurs commises par Ivory.

Heppel (J.-M.). — *Sur la théorie des poutres continues.* (2 p.)

Rankine (M.). — *Remarques sur la Note précédente.*

Lockyer (J.-N.). — *Remarques sur la dernière éclipse de Soleil, observée aux États-Unis.* (5 p.)

Souza (J.-A. de). — *Déterminations magnétiques mensuelles, faites à l'Université de Coïmbre;* 1866-1869. (11 p.)

Rankine (M.). — *Sur la théorie mathématique des lignes de courant, spécialement de celles qui ont quatre foyers et qui sont remontantes* (1).

Stewart (B). — *Résultats des observations mensuelles des forces d'inclinaison et de déclinaison à l'Observatoire de Kew;* 1863-1869. (11 p.)

Le Sueur (A.). — *Observations spectroscopiques de la nébuleuse d'Orion, faites au grand télescope de Melbourne.* (3 p.)

Le Sueur (A.). — *Sur les nébuleuses d'Argo et d'Orion, et sur le spectre de Jupiter.* (6 p.)

Glaisher (J.-W.-L.). — *Table des valeurs numériques du sinus intégral, du cosinus intégral et de l'exponentielle intégrale.*

De la Rue (W.), Stewart (B.) et Loewy (B.). — *Recherches de Physique solaire.* — N° II. *Positions et aires des taches, observées à Kew en* 1864-1866; *aire occupée par les taches sur la portion visible du disque solaire, de* 1832 *à* 1868.

Spottiswoode (W.). — *Sur le contact des coniques avec les surfaces.*

En chaque point d'une surface on peut tracer dix coniques ayant avec la surface six points communs infiniment voisins.

Royston-Pigott (G.-W.). — *Sur un chercheur aplanétique et ses effets pour accroître la netteté des images microscopiques dans les forts grossissements.* (3 p.)

Cayley (A.). — *Neuvième Mémoire sur les quantiques.*

Barlow (W.-H.). — *Sur la cause et la valeur théorique de la flexion dans les poutres.*

Strutt (J.-W.). — *Sur les valeurs des intégrales* $\int_0^1 Q_n Q'_{n'} d\mu$,

(1) Voir *Bulletin*, t. VI, p. 229.

Q_n, $Q'_{n'}$ *étant les coefficients de Laplace des ordres* n, n', *avec une application à la théorie de la radiation.*

T. XIX; 1870-1871.

Hennessy (J.-H.). — *Sur les lignes atmosphériques du spectre solaire.* (8 p., 1 pl.)

Rosse (le comte de). — *Sur la chaleur rayonnante de la Lune.* N° II. (5 p.)

Russell (W.-H.-L.). — *Sur les équations différentielles linéaires.* (art. III-V, 10 p.)

Dans l'article III, l'auteur reprend, par une méthode plus directe, les recherches faites dans l'article précédent (¹). Cette méthode a, de plus, l'avantage de faire disparaître les indéterminations résultant de la présence de facteurs communs dans le coefficient algébrique de la plus haute différentielle et au dénominateur de l'exponentielle dans l'expression de la solution.

Dans l'article IV, M. Russell applique la résolution des équations différentielles à la détermination de quelques intégrales définies intéressantes.

L'article V traite des conditions pour qu'une équation différentielle linéaire admette une solution de la forme P log Q, P et Q étant des fonctions rationnelles de x.

Le Sueur (A.). — *Observations au grand télescope de Melbourne.* (2 p.)

Guthrie (Fr.). — *Sur le rapprochement causé par la vibration.* (7 p.)

Expériences faites sur la tendance d'un morceau de carton librement suspendu à se rapprocher d'un diapason mis en vibration, même à une distance considérable.

Todhunter (I.). — *Sur le théorème de Jacobi concernant l'équilibre relatif d'un ellipsoïde fluide animé d'un mouvement de rotation, et sur la discussion de ce théorème par Ivory.* (14 p.)

L'auteur, sans entrer dans la discussion des Mémoires publiés par Ivory en 1831, 1834 et 1839 dans les *Philosophical Transactions,*

(¹) *Voir* plus haut, p. 73.

Mémoires qu'il considère comme entièrement inexacts, s'attache seulement à ce qui concerne le théorème de Jacobi sur la possibilité d'une figure ellipsoïdale d'équilibre à trois axes inégaux. Le travail d'Ivory sur cet objet est entaché d'erreurs aussi nombreuses que singulières. M. Todhunter, en les relevant, ajoute de nouvelles remarques à ce qui a été dit jusqu'à présent au sujet de ce théorème.

Heppel (J.-M.). — *Sur la théorie des poutres continues.* (12 p.)

Rankine (M.). — *Remarques sur le Mémoire précédent de M.* Heppel. (4 p.)

Rankine (M.). — *Sur la théorie mathématique des courants combinés.* (5 p.)

Walker (J.-T.). — *Sur les observations du pendule dans l'Inde.* (9 p.)

Strutt (J.-W.). — *Sur la théorie du son.* (2 p.)

Carpenter (W.-B.) et Jeffreys (J.-G.). — *Rapport sur les recherches sur les fonds de la mer, faites en juillet, août et septembre* 1870, *sur le navire de la Marine Royale* le Porcupine. (66 p., 1 carte.)

Pratt (J.-H.). — *Sur la constitution de la croûte solide de la Terre.* (2 p.)

Hennessey (J.-H.-N.). — *Observations actinométriques faites à Dehra et à Mussoorie, dans l'Inde, octobre et novembre* 1869. (8 p., 1 pl.)

Thomson (sir W.). — *Sur la détermination de la position d'un navire par des observations d'altitude.* (7 p., 2 tabl.)

Thomson (sir W.). — *Sur le rapprochement causé par la vibration. Lettre à M.* Fr. Guthrie. (2 p.)

Moseley (H.). — *Sur l'écoulement uniforme d'un liquide.* (2 p.)

Belavenetz (I.). — *Observations magnétiques faites pendant un voyage dans le nord de l'Europe et sur les côtes de l'océan Arctique, durant l'été de* 1870. (7 p.)

Wheatstone (sir Ch.). — *Expériences sur la polarisation successive de la lumière.* (9 p., 1 pl.)

Wolf. — *Sur la forme de la courbe des taches solaires.*

Fritz. — *Sur la connexion des taches solaires avec la configuration planétaire.*

Airy (G.-B.). — *Remarques sur la détermination de la position d'un navire par des observations d'altitude.* (2 p.)

Ansted (D.-T.). — *Sur la température de l'intérieur de la Terre, d'après les indications tirées des observations faites pendant la construction du grand tunnel subalpin.* (6 p.)

Whitehouse (W.). — *Sur un nouvel instrument pour indiquer les petites variations de la pression atmosphérique.* (3 p., 1 pl.)

Casey (J.). — *Sur les cyclides et les sphéro-quartiques.* (3 p.) (¹).

Roscoe (H.-E.) et Thorpe (T.-E.). — *Sur la mesure de l'intensité chimique de la totalité de la lumière diffuse, à Catane, pendant l'éclipse totale du 22 décembre 1870.* (3 p.)

Glaisher (J.-W.-L.). — *Sur le calcul de la constante d'Euler.* (10 p.)

M. Glaisher relève quelques erreurs de raisonnement et de calcul, commises par M. Shanks dans de précédentes Communications. Il s'agissait d'obtenir la constante d'Euler avec un grand nombre de décimales, au moyen de la série semi-convergente

$$\gamma = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{x} - \log x - \frac{1}{2x} + \frac{B_1}{2x^2} - \frac{B_2}{4x^4} + \frac{B_3}{6x^6} - \cdots,$$

γ étant cette constante, et B_1, B_2,... les nombres de Bernoulli. Les erreurs de calcul de M. Shanks sont dues principalement à des valeurs inexactes de $\log 2$ et du treizième nombre de Bernoulli. M. Glaisher donne la valeur exacte de γ avec 100 décimales.

Thomson (Sir W.). — *Moyen perfectionné pour l'emploi de la méthode de Sumner pour trouver la position d'un navire.*

Spratt. — *Sur la théorie des courants inférieurs de l'Océan.* (27 p.)

(¹) Voir *Bulletin*, t. IV, p. 231.

T. XX; 1871-1872.

Airy (G.-B.). — *Corrections aux longueurs calculées des ondes lumineuses, publiées dans les* Philosophical Transactions *pour l'année* 1868.

Cayley (A.). — *Corrections et additions au Mémoire sur la théorie des surfaces réciproques* (*Philos. Trans.*, t. CLXIX, 1869). (5 p.)

Shanks (W.). — *Seconde Note sur les valeurs numériques de* ε, $log_{\varepsilon}2$, $log_{\varepsilon}3$, $log_{\varepsilon}5$, *et* $log_{\varepsilon}10$, *et sur la valeur numérique du module* M *des logarithmes vulgaires, toutes ces valeurs étant données avec deux cent cinq décimales.* (2 p.)

Shanks (W.). — *Seconde Note sur la valeur numérique de la constante d'Euler et sur la sommation de la série harmonique employée pour obtenir cette valeur.* (5 p.)

Dans ces deux Notes, l'auteur corrige les erreurs signalées par M. Glaisher.

Stone (E.-J.). — *Détermination expérimentale de la vitesse du son.*

Airy (G.-B.). — *Sur une altération supposée dans la grandeur de l'aberration astronomique de la lumière, produite par le passage de la lumière à travers une épaisseur considérable de milieu réfringent.* (4 p.)

Perry (S.-J.) et Sidgreaves (W.). — *Mesures magnétiques dans l'est de la France en* 1869.

Huggins (W.). — *Note sur le spectre de la comète d'Encke.* (2 p.)

De la Rue (W.), Stewart (B.) et Loewy (B.). — *Sur quelques récentes recherches de Physique solaire, et sur une loi réglant le temps de la durée de la période des taches.* (5 p.)

Huggins (W.) — *Note sur l'apparence télescopique de la comète d'Encke.* (2 p.; 1 pl.)

Mc Farlane (D.). — *Expériences faites pour déterminer la conductibilité d'une surface pour la chaleur en mesure absolue.* (4 p.)

NARES (G.-S.). — *Recherches sur les courants dans le détroit de Gibraltar, faites en août* 1871. (10 p.)

CHAMBERS (Ch.). — *Direction et intensité absolue de la force magnétique terrestre à Bombay, et ses variations séculaires et annuelles.*

CHAMBERS (Ch.). — *Variations lunaires de la déclinaison magnétique à Bombay.*

SMYTH (C.-P.). — *Note sur un phénomène spectroscopique ultra-solaire possible.*

JANSSEN. — *Note sur l'éclipse de Soleil (déc.* 1871), *observée à Sholoor.*

AIRY (G.-B.). — *Expériences sur le pouvoir directif des gros aimants d'acier, de barreaux de fer doux aimantés, et de solénoïdes dans leur action sur de petits aimants extérieurs.*

MAXWELL (J.-Cl.). — *Sur l'induction des courants électriques dans une surface plane infinie, de conductibilité uniforme.* (9 p.)

SPOTTISWODE (W.). — *Sur le contact des surfaces.* (2 p.)

DE LA RUE (W.), STEWART (B.) et LOEWY (B.). — *Nouvelles recherches concernant l'influence planétaire sur l'activité solaire.* (8 p.; 1 pl.)

AIRY (G.-B.). — *Sur une périodicité supposée dans les éléments du magnétisme terrestre, la période étant de* 26 $\frac{1}{2}$ *jours.* (5 p.)

STRANGE (A.). — *Sur un nouveau grand théodolite, destiné à la grande mesure trigonométrique de l'Inde, avec une courte Notice sur un secteur zénithal employé dans le même travail.* (2 art., 14 p.)

HAUGHTOON (S.). — *Sur quelques principes élémentaires de Mécanique animale, nos V et VI.* (2 art., 4 p.)

SPOTTISWOODE (W.). — *Sur les anneaux produits par les cristaux soumis à la lumière polarisée circulairement.* (3 p.)

HUGGINS (W.). — *Sur le spectre de la grande nébuleuse d'Orion, et sur le mouvement de quelques étoiles s'approchant ou s'éloignant de la Terre.* (15 p.)

Broun (J.-A.). — *Sur la période de 26 jours de la force magnétique terrestre.* (8 p.)

Evans (F.-J.). — *Sur la valeur actuelle de la déclinaison magnétique occidentale (variation du compas) sur les côtes de la Grande-Bretagne et sur ses changements actuels.* (2 p.)

Stokes (G.-G.). — *Sur la loi de la réfraction extraordinaire dans le spath d'Islande.*

Clark (L.). — *Sur un étalon voltaïque de force électromotrice.* (5 p.)

Todhunter (I.). — *Note concernant l'attraction des sphéroïdes.* (7 p.)

Dans un Mémoire sur l'attraction des sphéroïdes, publié dans la *Connaissance des Temps* pour 1829, Poisson a fait voir que certaines formules importantes étaient vraies jusqu'aux quantités du *troisième* ordre inclusivement, par rapport aux quantités considérées comme très-petites du premier ordre. L'objet de cette Note est d'établir la vérité des formules pour tous les ordres de quantités très-petites, en étendant le procédé même de Poisson, sans toutefois examiner les difficultés auxquelles il peut être sujet.

Hayden (W.). — *Solutions géométriques approchées des problèmes de la duplication du cube et de la quadrature du cercle.* (2 p.)

Les constructions proposées, qui sont très-simples, déterminent $\sqrt[3]{2}$ avec une erreur moindre que 0,00005, et π avec une erreur moindre que 0,0000001. Elles sont donc plus que suffisantes pour toutes les applications graphiques.

Carpenter (W.-B.). — *Rapport sur les recherches scientifiques faites pendant les mois d'août, septembre et octobre* 1871, *à bord du navire* le Shearwater, *de la Marine Royale.* (110 p.; 5 pl.)

Voici la table de cet important Mémoire :

Introduction. — I. Phénomènes de température de l'Atlantique, dans leurs rapports avec ceux des autres mers et avec la circulation océanique générale. — II. Nouvelles recherches sur les courants du détroit de Gibraltar. — III. Recherches physiques dans la Méditerranée. — IV. Recherches biologiques dans la Méditerranée.

— *Appendice :* I. Sur le Gulf-Stream, dans ses rapports avec la circulation océanique générale. — II. Sur les courants sous-marins des Dardanelles et de la Baltique.

T. XXI; 1872-1873.

Russell (W.-H.-L.). — *Sur les équations différentielles linéaires.* (Art. VI et VII, 7 p.)

Dans le premier de ces deux articles, l'auteur considère les équations différentielles linéaires qui sont satisfaites par les racines d'une équation algébrique admettant une solution explicite de la forme

$$y = \sqrt[m]{X + \sqrt[r]{Y + \sqrt[s]{Z + \ldots}}},$$

X, Y, Z,... étant des fonctions rationnelles de x. Dans le second, il présente quelques remarques sur les solutions des équations différentielles, considérées comme transcendantes.

Stuart (J.). — *Étude relative à l'attraction d'une bobine galvanique sur une petite masse magnétique.* (4 p.)

Lockyer (N.). — *Recherche d'analyse spectrale, en relation avec le spectre du Soleil.* (Art. I et II, 4 p.)

Airy (G.-B.). — *Observations magnétiques dans les ponts de fer tubulaires de Britannia et de Conway.*

Lockyer (N.) et Seabroke (G.-M.). — *Sur un nouveau mode d'envisager la chromosphère.*

Wenham (F.-H.). — *Nouvelle formule pour un objectif de microscope.* (8 p.)

Todhunter (I.). — *Note sur une extension erronée du théorème de Jacobi.* (3 p.)

M. Todhunter relève une erreur qu'il a rencontrée dans un *Traité de Mécanique,* publié en 1870 par M. Schell [1]. Cet auteur cite, comme un fait démontré par Dahlander [2], que « l'équilibre relatif d'un ellipsoïde animé d'un mouvement de rotation subsis-

(1) *Theorie der Bewegung und der Kräfte.*

(2) Poggendorff's *Annalen,* t. CXXIX; 1866, p. 443.

terait lors même que l'axe de rotation ne coïnciderait pas avec un axe principal de l'ellipsoïde ». M. Todhunter prouve, au contraire, que le seul axe de rotation compatible avec l'équilibre est le plus petit axe principal.

Airy (G.-B.). — *Note additionnelle au Mémoire « Sur une altération supposée dans la grandeur de l'aberration astronomique de la lumière, produite par le passage de la lumière à travers un milieu réfringent d'une épaisseur considérable »*.

Cayley (A.). — *Sur la courbure et les surfaces orthogonales.* (2 p.)

« L'objet principal de ce Mémoire est d'établir l'équation aux dérivées partielles du troisième ordre, à laquelle satisfait le paramètre d'une famille de surfaces appartenant à un système orthogonal triple. Bouquet, le premier, a remarqué qu'une famille donnée de surfaces n'appartient pas, en général, à un système orthogonal, mais que, pour qu'elle y appartienne, une certaine condition doit être satisfaite; ensuite Serret a fait voir que cette condition consiste en ce que le paramètre, considéré comme une fonction des coordonnées, doit satisfaire à une équation aux dérivées partielles de troisième ordre. Cette équation n'a pas été obtenue par lui ni par les autres géomètres français qui se sont occupés de ce sujet, quoique des méthodes pour l'obtenir, équivalentes au fond, quoique différant entre elles par la forme, aient été données par Darboux et par Levy. Ce dernier auteur a même trouvé une forme particulière de l'équation, savoir, ce que devient l'équation générale lorsqu'on y fait $X = 0$, $Y = 0$ (X, Y, Z étant les dérivées premières, ou des quantités proportionnelles aux cosinus d'inclinaison de la normale). En faisant usage de la méthode de Levy, M. Cayley a obtenu l'équation générale, et l'a communiquée à l'Académie des Sciences de Paris. Toutefois, son résultat était d'une forme très-compliquée, due, comme il l'a reconnu depuis, à la présence du facteur étranger $X^2 + Y^2 + Z^2$. Par quelques réductions laborieuses, il était parvenu à se débarrasser de ce facteur, et à obtenir l'équation sous la forme qu'il expose dans son travail actuel. Comme la méthode par laquelle il était arrivé au résultat était peu commode, il a repris la question, et a retrouvé l'équation à l'aide de transformations analytiques très-longues à effectuer, mais très-simples en théorie. »

Guthrie (Fr.). — *Sur une nouvelle relation entre la chaleur et l'électricité.*

Jago (J.). — *La direction visible : nouvelle contribution élémentaire à l'étude de la vision monoculaire et binoculaire.* (5 p.)

Routh (E.-J.). — *Quelques nouveaux théorèmes sur le mouvement d'un corps autour d'un point fixe.* (9 p.)

« Poinsot construit le mouvement d'un corps rigide autour d'un point fixe, dans le cas où il n'est soumis à l'action d'aucune force, au moyen d'un ellipsoïde ayant son centre au point fixe et roulant sur un plan fixe. De cette manière, les relations de la ligne invariable et de l'axe instantané, entre eux et avec les autres parties du corps, peuvent se trouver par la Géométrie des solides. Il est évident que, dans beaucoup de cas, ces relations sont de simples traductions dans le langage de la Géométrie des solides de certaines propriétés de l'ellipse sphérique. En essayant de faire usage d'une manière générale de l'ellipse sphérique, M. Routh a été conduit à quelques théorèmes qu'il considère comme intéressants, et qui lui semblent nouveaux. » L'objet de la présente Note est seulement de présenter les résultats obtenus.

Rosse (le comte de). — *Sur la chaleur rayonnante de la Lune, sur la loi de son absorption par notre atmosphère, et de sa variation d'intensité avec les phases.*

Mc Kichan (D.). — *Détermination du nombre d'unités électrostatiques contenues dans l'unité électromagnétique.*

Meldrum (C.). — *Sur une période de pluie liée à la période des taches solaires.* (9 p.)

Stewart (B.) et Tait (P.-G.). — *Sur l'échauffement d'un disque par une rotation rapide dans le vide.* (8 p.)

Shanks (W.). — *Sur l'extension de la valeur numérique de* π. (2 p.)

L'auteur a eu la patience de pousser les calculs jusqu'à la 707e décimale, en se servant, comme la plupart de ses prédécesseurs, de la formule de Machin.

Chambers (Ch.) et Chambers (F.). — *Sur l'expression mathématique d'observations de phénomènes périodiques complexes, et sur l'influence planétaire relativement au magnétisme terrestre.*

Ball (R.-St.) — *Recherches sur la dynamique d'un corps rigide à l'aide de la théorie des vis.*

Le travail de M. Ball, annoncé dans cette Note, est un développement de celui qu'il a inséré dans les *Transactions of the Royal Irish Academy*, t. XXV, et dont nous rendrons compte.

Wharton (J.-L.). — *Observations sur les courants de la surface et du fond dans les Dardanelles et le Bosphore.* (6 p.)

De la Rue (W.), Stewart (B.) et Loewy (B.). — *Sur une tendance observée dans les taches solaires à changer alternativement d'un hémisphère du Soleil à l'autre.* (4 p.)

Clarke (A.-R.). — *Résultats des comparaisons des étalons de mesures de longueur d'Angleterre, d'Autriche, des États-Unis, du Cap de Bonne-Espérance, et d'un second étalon russe, faites au Comité d'artillerie à Southampton.* (2 p.)

Clifford (W.-K.). — *Sur les problèmes de contact de M. Spottiswoode.* (1 p.)

Ce travail est divisé en deux Parties, dont l'une traite du contact des coniques avec une surface donnée en un point donné, l'autre du contact d'une surface du second ordre avec une surface du $n^{\text{ième}}$ ordre. La méthode employée par l'auteur est une extension de celle de Joachimsthal pour le contact des lignes avec les courbes et les surfaces.

Royston-Pigott (G.-W.). — *Recherches sur les spectres solaires circulaires, appliquées à l'examen de l'aberration optique des microscopes et des télescopes, et construction d'un oculaire compensateur; faisant suite au Mémoire sur un chercheur, pour les images aplanétiques.* (16 p., 5 pl.)

Ellis (A.-J.). — *Sur les analogues algébriques des relations logiques.* (2 p.)

L'objet de ce travail est d'examiner la « théorie mathématique de la logique », que Boole a fondée, dans ses *Laws of thought*, sur le principe suivant : « Concevons une Algèbre dans laquelle les symboles $x, y, z, \ldots$ admettent indifféremment les valeurs 0 et 1, et ces valeurs seules. Les lois, les axiomes et les procédés d'une pareille Algèbre seront identiques dans toute leur étendue avec les lois, les axiomes et les procédés d'une Algèbre de la logique. La

différence d'interprétation seule les séparera. » M. Ellis montre que ce principe doit être soumis à des restrictions.

Lockyer (J.-N.) et Roberts (W.-Ch.). — *Sur l'analyse quantitative de certains alliages au moyen du spectroscope.*

Lockyer (J.-N.). — *Recherches d'analyse spectrale, se rattachant au spectre du Soleil.* 3e Partie. (6 p.)

PUBLICATIONS DANOISES.

I. Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter. 5. Række, naturvidenskabelig og mathematisk Afdeling, 9 Bd (1).

Colding (A.). — *Sur les lois des courants dans les conduites ordinaires et dans la mer.* (134 p., dan., avec un résumé français de 17 p., 3 pl.)

Steen (Ad.). — *Sur la pression des fluides homogènes pesants sur les aires planes.* (19 p., dan.; rés. fr. de 7 p., 1 pl.)

L'auteur rapporte le centre de pression à un système de coordonnées dans le plan de l'aire considérée. Il en déduit, entre autres, le théorème de Cotes sur l'identité de ce point avec le centre de percussion et d'oscillation par rapport à la droite d'intersection du plan avec la surface libre du fluide, et des relations entre le centre de pression et l'ellipse centrale de l'aire.

Colding (A.). — *Sur les lois du mouvement de l'eau dans les couches terrestres.* (54 p., dan.; rés. fr. de 4 p., 2 pl.)

Topsöe (H.) et Christiansen (C.). — *Recherches cristallographiques et optiques.* (147 p., dan.)

II. Oversigt over det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger og dets Medlemmers Arbejder (2). — 1870-1872, et 1873, nos 1-2.

Année 1870.

Lorenz (L.) — *Sur le nombre des molécules renfermées dans 1 milligramme d'eau* (4 p.)

---

(1) *Mémoires de la Société Royale des Sciences de Danemark.* 5e série. Section des Sciences physiques et mathématiques, t. IX. In-4o.

(2) *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Danemark.* In-8o. — En danois, avec un résumé français des principaux articles.

Année 1871.

La Cour (P.). — *Sur une nouvelle méthode pour mesurer la hauteur des nuages.* (13 p.; rés. fr. de 3 p.)

Colding (A.). — *Remarques sur les lois des courants de l'air.* (20 p., 1 pl.)

Colding (A.) — *Sur l'ouragan du 21 août 1871 à Saint-Thomas.* (17 p.; rés. fr. de 1 p., 1 pl.)

Année 1872.

Lorenz (L.). — *Détermination des degrés de chaleur en mesure absolue.* (21 p.)

Dans ce Mémoire, dont on trouve des traductions dans les *Annales de Poggendorff,* t. CXLVII, dans le *Journal de Physique de d'Almeida* (extrait), 1873, et dans le *Philosophical Magazine,* 1873, l'auteur définit l'unité de degré de chaleur en valeur absolue, par l'élévation de température produite par l'unité de travail transformée en chaleur, et appliquée au nombre d'atomes que l'unité d'électricité dégage d'un électrolyte binaire. Puis il montre l'analogie de la propagation de l'énergie par la chaleur et par l'électricité.

Année 1873.

Lorenz (L.). — *La résistance du mercure au passage de l'électricité en mesure absolue.* (17 p.)

L'auteur, pour déterminer le courant d'induction de l'instrument dont il s'est servi, calcule la force électromotrice induite à un disque tournant par un anneau conducteur et concentrique au disque. Une traduction de ce Mémoire a paru dans les *Annales de Poggendorff,* t. CXLIX.

III. Ouvrages divers.

Hansen (Chr.) — *Elementær Arithmetik og Algebra.* 1ste Del. — Kjøbenhavn, Ursin, 1873.

Holmberg (L.-F.) og Steen (Ad.). — *De mekaniske Grundlove for Bygningsvæsenet. I elementær Fremstilling.* (Principes mécaniques de l'Architecture, exposés élémentairement.) — Kjøbenhavn, Reitzel, 1871.

Madsen (V.-H.-O.) — *Elementair Arithmetik og Algebra.* — Kjøbenhavn, Philipsen, 1872.

Mundt (C.-E.). — *Elementerne af den almindelige Störrelselære* (*Algebra*). (Éléments de la théorie générale de la grandeur, ou Algèbre.) — Kjøbenhavn, Gyldendal, 1873, 2 vol.

Oppermann (L.-H.-F.) — *Elementar-mathematische Abhandlungen.* — I. *Elementare Darstellung der numerischen Summation und Quadratur* (1). (22 p. in-4°.)

Dans le premier des deux Mémoires que contient ce cahier, l'auteur traite de la sommation des séries. Il trouve, par des procédés élémentaires, la sommation des séries dont les termes sont de la forme $t = \mathrm{F}(x)$ et $t = p^{x-k}\mathrm{F}(x)$, $\mathrm{F}(x)$ étant une fonction entière et rationnelle de x, ou une fonction dont le dénominateur est composé de facteurs réels et différents entre eux. — Le second Mémoire, sur les quadratures, a été imprimé dans le *Tidsskrift* (2).

Petersen (J.). — *Om Ligninger, der löses ved Kvadratrod, med Anvendelse paa Problemers Lösning ved Passer og Lineal.* — *Afhandling for den filosofiske Doktorgrad* (3) — Kjøbenhavn, Ferslev, 1871.

Ce Mémoire contient une démonstration complète, la première, croyons-nous, qui ait été donnée, du fait important que *les coniques sont les seules courbes dont on puisse déterminer par la règle et le compas les points d'intersection avec une droite quelconque.* L'auteur se sert, pour le démontrer, de considérations algébriques, qui conduisent à des résultats intéressants par eux-mêmes. Il prouve, par exemple, que la résolution de toute équation résoluble par des racines carrées peut se faire par p extractions de racines. D'un autre côté, il donne des extensions et des applications, qui se présentent sans difficulté, de ce théorème géométrique : *Les cercles et les droites sont les seules lignes dont on puisse déterminer par la règle et le compas les points d'intersection avec un cercle* QUELCONQUE. Les courbes dont on peut déterminer de la même manière

---

(1) *Mémoires de Mathématiques élémentaires.* — I. Exposé élémentaire de la sommation et de la quadrature numérique. Copenhague; 1872.

(2) Voir *Bulletin*, t. II, p. 15.

(3) *Sur les équations résolubles par des racines carrées, avec application à la résolution des problèmes par le compas et la règle.* Thèse pour le doctorat. (46 p. in-4°.)

les points d'intersection avec un cercle quelconque d'un réseau linéaire sont les cycliques du quatrième ordre, qui ont une série de cercles bitangents appartenant à ce réseau. Dans beaucoup de cas on peut se servir de ces propriétés pour trouver par un nombre limité d'essais, non-seulement si un problème est résoluble par la règle et le compas, mais encore comment s'obtient cette solution.

PETERSEN (J.) — *Den plane Trigonometri og de sfæriske Grundformler*. Anden Udgave. — Kjøbenhavn, P. Bloch, 1873.

SEIDELIN (C.) — *Forelæsninger over Deskriptivgeometri*. (Leçons de Géométrie descriptive.) — Copenhague, chez l'auteur, 1873.

STEEN (Ad.). — *Mathematiske Opgaver i det indledende Cursus*. (Problèmes de Mathématiques pour le cours préparatoire, 5ᵉ édition). — Kjøbenhavn, Reitzel, 1871.

STEEN (Ad.). — *Elementær Plangeometri*. (Géométrie plane élémentaire, 2ᵉ édition.) — Kjøbenhavn, Reitzel, 1873.

STEEN (Ad.) — *Integration af lineære Differentialligninger af anden Orden ved Hjælp af Kjædebroker*. Universitetsprogram [1].

L'auteur forme par des différentiations successives un système d'équations, dont on peut déduire une fraction continue, servant à exprimer $\dfrac{y}{\frac{dy}{dx}}$. Si cette fraction continue est convergente, on peut trouver par son moyen une solution particulière, puis la solution complète. L'auteur applique son procédé à un grand nombre d'équations, parmi lesquelles nous citerons l'équation

$$y = a\frac{dy}{dx} + (bx + c)\frac{d^2y}{dx^2},$$

dont il établit et discute l'intégration par les fonctions de Bessel; et l'équation

$$ky = 2(x+b)\frac{dy}{dx} + [(x+b)^2 - c^2]\frac{d^2y}{dx^2},$$

---

[1] *Intégration des équations différentielles linéaires du second ordre à l'aide des fractions continues*. Programme de l'Université de Copenhague; 1873. (66 p. in-4°.)

qui, dans le cas particulier où $k = r(r+1)$, r étant entier et positif, s'intègre par la fonction sphérique, mais toujours par une intégrale définie. Z.

GIORNALE DI MATEMATICHE, pubblicato per cura di G. BATTAGLINI, E. FERGOLA, etc. ([1]).

T. XI (fin); juillet-décembre 1873.

OVIDIO (E. D'). — *Sur les relations métriques en coordonnées homogènes.* (24 p.)

Dans ce Mémoire, l'auteur établit les relations métriques fondamentales entre les points, les plans et les droites en coordonnées homogènes, en faisant dériver d'une source unique les relations métriques en coordonnées ponctuelles et celles en coordonnées planaires, de manière à expliquer l'analogie entre les deux ordres de relations.

ARMENANTE (A.). — *Sur les courbes gauches rationnelles du quatrième ordre.* (12 p.)

Dans ce travail (qui sera continué) sont reproduites, sous forme analytique, en employant les méthodes symboliques de représentation, les principales propriétés des courbes gauches du quatrième ordre pour lesquelles les coordonnées de chaque point s'expriment par des fonctions rationnelles d'un paramètre, propriétés déjà en grande partie trouvées par M. Cremona, à l'aide d'une méthode purement géométrique.

BONOLIS (A.). — *Recherche des valeurs des formules*

$$\sum_{k=0}^{k=k}\left[\binom{k+1}{1}\binom{s-3}{0}+\binom{k+1}{2}\binom{s-3}{1}+\ldots+\binom{k+1}{k+1}\binom{s-3}{k}\right]$$

et

$$\sum_{k=0}^{k=n-1}\left[\binom{k+1}{1}\binom{s-3}{0}+\binom{k+1}{2}\binom{s-3}{1}+\ldots+\binom{k+1}{k+1}\binom{s-3}{k}\right](n-k).$$

(11 p.)

([1]) Voir *Bulletin*, t. VI, p. 110.

PACI (P.). — *Sur les nombres complexes.* (2 p.)

L'auteur fait remarquer comment les nombres complexes, conformément à l'interprétation de Gauss, servent à représenter complétement une force.

ASCHIERI (F.). — *Sur les systèmes de droites dans l'espace.* (13 p.)

Dans cette Note (qui fait suite à une Note précédente), l'auteur traite des complexes *tangents* à un complexe, le long des droites appartenant à celui-ci, et des complexes *développables*.

ARMENANTE (F.). — *Solutions de questions proposées dans l'Educational Times.* (2 p.)

ISÈ (E.). — *Sur le degré de la résultante.* (1 p.)

ARTICLES BIBLIOGRAPHIQUES sur les publications suivantes :

W. THOMSON : *Reprint of Papers on Electrostatics and Magnetism.* — J.-C. MAXWELL : *A Treatise on Electricity and Magnetism.* — É. MATHIEU : *Cours de Physique mathématique.* — *Bulletin de la Société Mathématique de France,* t. I, n°s 1 et 2. — PERIODICO *di Scienze matematiche e naturali per l'insegnamento secondario.* — G. DARBOUX : *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques, et sur la théorie des imaginaires.* (11 p.)

JANNI (G.). — *Exposition de la théorie des substitutions* (suite et fin). (44 p.)

Cet article contient les Chapitres suivants : VI. Substitutions commutables avec une substitution donnée. — VII. Faisceaux de substitutions commutables entre elles. — VIII. Groupes primaires. — IX. Groupe orthogonal. — X. Groupe abélien. — XI. Groupes hypoabéliens. — XIII. Méthodes générales pour former des groupes partiels contenus dans le groupe linéaire.

HESSE (O.). — *Cycle d'équations entre des déterminants* (*généralisation analytique du théorème de Pascal*). Traduit par V. VALERIANI. (9 p.)

VECCHIO (A.). — *Note sur les enveloppes.* (3 p.)

Concernant la manière de trouver l'enveloppe des courbes

$F(x, y, a) = 0$, quand cette équation a la forme $a = \varphi(x, y)$.

Bonolis (A.) — *Quelques formules tirées de celles de Newton pour le calcul des fonctions symétriques simples des racines d'une équation.* (10 p.)

Cassani (P.). — *Sur les hypothèses fondamentales de la Géométrie.* (9 p.)

Considérations sur l'origine et la nature des notions fondamentales de la Géométrie, et sur l'infini de la droite, du plan et de l'espace dans la Géométrie non-euclidienne.

Retali (V.). — *Sur les progressions géométriques d'ordre supérieur.* (8 p.)

Exposition de diverses propriétés des progressions géométriques du 2ᵉ, du 3ᵉ,... ordre, c'est-à-dire des séries de quantités pour lesquelles les quotients des quantités consécutives forment une progression géométrique du 1ᵉʳ, du 2ᵉ,... ordre.

Janni (G.). — *Sur le produit de deux matrices.* (2 p.)

Battaglini (G.). — *Sur le mouvement d'un système de forme invariable.* (9 p.)

En rapportant le système à un tétraèdre fondamental, l'auteur trouve les équations générales qui en déterminent le mouvement, et démontre les principes des *aires*, des *forces vives*, et du mouvement du centre d'inertie.

Arzelà (C.). — *Développement en séries, ordonnées suivant les puissances décroissantes de la variable, de n fonctions algébriques définies par autant d'équations à coefficients déterminés.* (8 p.)

Généralisation du procédé exposé par M. Serret, dans son *Traité d'Algèbre supérieure*, pour le cas d'une seule équation.

Tognoli (O.). — *Sur la recherche de l'équation de l'enveloppe d'une série de courbes planes.* (2 p.)

Observations relatives à la *Note sur les enveloppes*, de M. Vecchio, citée plus haut.

Tognoli (O.). — *Sur un mode de génération des courbes planes du troisième ordre.* (3 p.)

Génération de la courbe plane du troisième ordre, au moyen de deux faisceaux projectifs de cercles, qui déterminent sur une droite une même involution quadratique.

G. B.

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATISCHEN UND NATURWISSENSCHAFTLICHEN UNTERRICHT [1].

T. IV; 1873.

HOFFMANN (J.-C.-V.). — *Essai d'un enseignement préparatoire de la Géométrie.* (13 p.)

Presque tous les hommes qui se sont occupés sérieusement de pédagogie ont reconnu la nécessité de faire précéder l'enseignement scientifique et démonstratif de la Géométrie d'un enseignement préparatoire, destiné à familiariser les élèves avec les objets dont ils auront plus tard à étudier et à coordonner les propriétés. M. Hoffmann donne un programme de cet enseignement pour les commencements de la Géométrie plane.

BROCKMANN (F.-J.). — *Nouvelles remarques sur la formule des tangentes séparées.* (2 p.)

Il s'agit de l'usage, en Trigonométrie plane, de la formule

$$\operatorname{tang} B = \frac{b \sin A}{c - b \cos A}.$$

FRESENIUS (F.-C.). — *Problème géométrique d'Architecture.* (2 p.)

HOFFMANN (J.-C.-V.). — *Études sur les notions fondamentales de la Géométrie* (suite). (17 p.)

Toujours la question des parallèles! On est bien forcé d'avouer que la seule puissance de la logique ne peut rien créer; mais on a inventé, pour en tenir lieu, un mode de perception spécial, qui, sous les noms d'*évidence, d'intuition* (*Anschauung*), participe à la fois de la fécondité de l'expérience et de la certitude de la déduction. Il faudra encore bien du temps avant que cette entité aille rejoindre dans le néant tous les fantômes de la Scolastique.

---

[1] Voir *Bulletin*, t. III, p. 48.

Nous ne nous lasserons pas de le répéter, l'intuition n'est autre chose que l'expérience faite sans se déranger, et dans laquelle la mémoire remplace l'activité physique. Par conséquent ses conclusions sont, pour le moins, aussi subjectives que celles de l'expérience matérielle. Dites à un observateur, dont la vue n'aura jamais franchi les murailles de son jardin, que deux voyageurs, partant de points différents, et marchant tous les deux vers le nord, finiront toujours par se rencontrer; il ne manquera pas de traiter cette proposition d'absurde et de contraire à l'évidence. Sommes-nous vis-à-vis de l'espace infini dans une autre position que notre observateur vis-à-vis des dimensions du globe terrestre?

Avouons donc une bonne fois, sans croire notre dignité de géomètres rabaissée, que l'expérience joue un rôle considérable dans l'étude des propriétés de l'espace, et laissons à ceux qui regardent l'espace comme une pure conception intellectuelle sans existence propre la satisfaction de tirer de la raison pure, sans le secours des sens, les propriétés de cet être de raison. Pour nous qui croyons à sa réalité objective, résignons-nous à employer pour son étude les moyens ordinaires qui seuls nous ont réussi dans nos recherches sur le *non-moi*.

Kober (J.), Hoffmann (J.-C.-V.) et Becker (J.-C.). — *Remarques sur les définitions.* (13 p.)

Les définitions qui reposent sur des théorèmes, telles que celles du rectangle, de la similitude, etc., ne donneraient pas lieu à d'aussi interminables discussions, si on les considérait comme ayant pour seul but de fixer le sens d'un mot résumant des propriétés préalablement établies.

Affolter (Fr.-G.). — *Théorèmes, démonstrations et constructions, pour un cours de Géométrie nouvelle dans les écoles secondaires.* (11 p., 1 pl.)

L'auteur démontre par les procédés de la Géométrie synthétique, mis à la portée des élèves de l'enseignement secondaire, des propositions appartenant au programme de cet enseignement, et d'autres qu'il serait aisé d'y faire entrer. Il suit les méthodes exposées dans l'Ouvrage élémentaire de M. C.-F. Geiser (1).

---

(1) *Einleitung in die synthetische Geometrie.* Leipzig, 1869.

Hoffmann (J.-C.-V.). — *Théorie de la division des fractions.* (6 p.)

Hoffmann (J.-C.-V.). — *La psychologie employée comme guide dans l'enseignement des Mathématiques.* (6 p.)

L'étude attentive du développement de l'intelligence chez les enfants suggère à un maître expérimenté une foule de précautions, qui peuvent, à première vue, paraître excessives, mais qui n'en ont pas moins leur importance, en ce qu'elles contribuent à faciliter l'intelligence des matières enseignées et à maintenir la rectitude de l'esprit. L'auteur traite ici les questions suivantes : 1. Lequel vaut le mieux de placer le multiplicateur *avant* ou *après* le multiplicande? L'auteur se prononce pour la seconde règle. — 2. Manières d'indiquer le prolongement d'une ligne. — 3. Une faute grossière contre la méthode naturelle dans les Traités de Géométrie analytique (l'introduction prématurée de la transformation des coordonnées.)

Müller (J.). — *Les relations entre la distance focale et les foyers conjugués d'une lentille, d'après une nouvelle formule.* (3 p.)

Kudelka (J.). — *Les sections coniques déduites du théorème de Pythagore.* (2 p.)

Erler. — *Remarques diverses.* (10 p.)

Reidt. — *Remarques sur la pratique de l'enseignement trigonométrique.* (7 p.).

Dans cet article, l'auteur prend la défense de l'emploi des angles auxiliaires pour ramener les formules à la forme monôme. Nous admettrons volontiers que quelquefois, surtout dans une longue série de calculs, l'usage de ces angles donne plus de régularité aux opérations, et peut même, par exception, en abréger la durée; mais ce que nous ne pouvons comprendre, c'est de voir soutenir que l'usage des Tables trigonométriques soit aussi simple et aussi prompt que celui des Tables des logarithmes des nombres. Si l'interpolation des Tables trigonométriques à cinq décimales est facile, celle des Tables de même étendue pour les nombres l'est encore bien plus, et, d'autre part, il est facile de se convaincre que l'introduction des angles auxiliaires, bien que donnant aux formules

une apparence plus simple pour l'œil, ne diminue presque jamais le nombre des lectures nécessaires.

Krumme. — *L'analyse des démonstrations.* (3 p.)

Fresenius. — *Le point mathématique.* (4 p.)

Kober (J.). — *Une proposition fausse.* (2 p.)

Plagge. — *Deux valeurs approchées pour le côté et l'angle au centre de l'heptagone régulier inscrit au cercle.* (1 p.)

Le rapport du côté au rayon est égal à $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, à moins de 0,002 près.

Sickênberger (A.). — *Orthographe mathématique.* (13 p.)

Remarques sur les notations.

Dieckmann (J.). — *Sur la théorie des équations du second degré.* (12 p.)

Origine et signification des équations quadratiques. Exposition de la méthode de résolution la plus générale.

Dickstein (S.). — *Sur les caractères de divisibilité.* (2 p.)

Dickstein (S.). — *Sur la mesure des angles.*

Masing (C.). — *Sur la divisibilité des nombres.* (4 p.)

Hoffmann (J.-C.-V.). — *Sur l'orthographe mathématique. Les formules d'intérêt simple disposées pour le calcul de tête.* (4 p.)

Zerlang. — *Sur les rapports irrationnels de lignes.*

J. H.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Rapport sur les travaux du Congrès international des Météorologistes, réunis à Vienne du 2 au 16 septembre 1873. Procès-verbaux et annexes. — Vienne (Paris, Gauthier-Villars), 1874. Gr. in-8, 114 p. 1 fr. 50

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

ZEUTHEN (H.-G.). — ALMINDELIGE EGENSKABER VED SYSTEMER AF PLANE KURVER, MED ANVENDELSE TIL BESTEMMELSE AF KARAKTERISTIKERNE I DE ELEMENTÆRE SYSTEMER AF FJERDE ORDEN. Med 5 Tavler (109 p. in-4°) [1]. — *Avec un Résumé en français* (Mémoires de la Société Danoise des Sciences et Lettres; 5e série, t. X; 1873).

(Compte rendu par l'auteur.)

Les courbes d'ordre n, douées de d points doubles et de e points cuspidaux, et assujetties à $\frac{n(n+3)}{2} - d - 2e - 1$ conditions, forment un système. Je désigne par

μ le nombre des courbes du système qui passent par un point donné;

b l'ordre du lieu des points doubles;

c l'ordre du lieu des points cuspidaux;

p la classe de l'enveloppe des tangentes aux points doubles;

q la classe de l'enveloppe des tangentes aux points cuspidaux;

u la classe de l'enveloppe des tangentes issues des points doubles;

v la classe de l'enveloppe des tangentes issues des points cuspidaux;

x la classe de l'enveloppe des droites joignant deux points doubles;

y la classe de l'enveloppe des droites joignant un point double à un point cuspidal;

z la classe de l'enveloppe des droites joignant deux points cuspidaux;

$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2$ le nombre des courbes douées d'un nouveau point double, α_0 étant celui des courbes où aucune des branches qui forment le point double n'est une droite, α_1 celui des courbes où une de ces deux branches est une droite, α_2 celui des courbes où les branches sont toutes les deux des droites;

---

[1] *Recherche des propriétés générales des systèmes de courbes planes, suivie d'une application à la détermination des caractéristiques des systèmes élémentaires du quatrième ordre.* Avec 5 planches.

β le nombre des courbes où un point double est dégénéré en un point cuspidal ;

$\gamma = \gamma_0 + \gamma_1$ le nombre des courbes où un point cuspidal est dégénéré en un point de contact de deux branches, γ_0 étant celui des courbes où aucune de ces branches n'est une droite, γ_1 celui des courbes où l'une des branches est une droite ;

$(2d)$ le nombre des courbes où deux points doubles coïncident ;

(de) le nombre des courbes où un point double coïncide avec un point cuspidal ;

$(2e)$ le nombre des courbes où deux points cuspidaux coïncident ;

$(3d)$ le nombre des courbes où trois points doubles coïncident en un point triple ;

$(2de)$ le nombre des courbes où deux points doubles et un point cuspidal coïncident ;

$(d2e)$ le nombre des courbes où un point double et deux points cuspidaux coïncident.

En ajoutant des accents aux notations précédentes n', μ', je forme les notations des nombres réciproques qu'on obtient par le principe de dualité ; γ'_1, $(2d')$, $(d'e')$, $(2e')$ ne seront pas différents de γ_1, $(2d)$, (de), $(2e)$.

Si le système ne contient pas d'autres courbes singulières que celles qui sont nommées ici, les nombres énumérés doivent satisfaire aux équations suivantes :

$$2(n-1)\mu = \mu' + 2b + 3c + \alpha',$$

$$d.\mu' + n'.b = 2p + u + \beta,$$

$$e.\mu' + n'.c = 3q + v + \gamma,$$

$$2(d-1)b = 2x + (2d) + 6(3d) + 3(2de) + (n-6)\alpha'_0 + (n-4)\alpha'_1 + (n-2)\alpha'_2,$$

$$e.b + d.c = y + (de) + 2(2de) + 3(d2e),$$

$$2(e-1)c = 2z + (2e) + 3(d2e) + 4\alpha'_0 + 2\alpha'_1 + \beta' + 12\gamma'_0,$$

$$(n-2)\mu' + (n+n'-4)\mu = c' + p + 2q,$$

$$(n-2)b + d.\mu = p + 3(3d) + 3(2de) + 2(d2e) + (n-6)\alpha'_0 + (n-4)\alpha'_1 + (n-2)\alpha'_2,$$

$$(n-2)c + e.\mu = 2q + (2de) + 4(d2e) + 4\alpha'_0 + 2\alpha'_1 + 8\gamma'_0,$$

$$(n-3)[(n-2)\mu' + 2(n'-2)\mu]$$
$$= 2b' + 2u + 3v + n'\alpha'_0 + (n'-1)\alpha'_1 + (n'-2)\alpha'_2,$$

$$(n-3)[(n-2)b + 2d.\mu = u + 4x + 3y + [d - 2(n-6)]\alpha'_0$$
$$+ [d - 2(n-4)]\alpha'_1 + [d - 2(n-2)]\alpha'_2,$$

$$(n-3)[(n-2)c + 2e.\mu] = v + 2y + 6z + (e-6)\alpha'_0 + (e-3)\alpha'_1 + e\alpha'_2,$$

$$2p = 2b + \beta + 2(2d) + 3(de) + (d2e),$$

$$2(n-1)\mu + 2\mu' = q' + 2b + 2c + \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha' + 2\beta' + 3\gamma',$$

et aux équations qu'on en forme en substituant des notations accentuées à celles qui n'ont pas d'accent, et réciproquement.

Je démontre, dans la *deuxième Partie* de mon Mémoire, ces formules par le principe de correspondance, en me servant, pour déterminer les coefficients numériques des différents termes, de la règle que j'ai exposée dans le cinquième volume de ce *Bulletin*. Mais, pour faire usage de cette règle, il faut connaître non-seulement les propriétés des courbes singulières elles-mêmes, mais aussi celles des courbes du système qui en sont infiniment voisines. C'est à cette connaissance que conduisent les études particulières des différentes courbes singulières que j'ai entreprises dans la *première Partie* de mon Mémoire. On y trouve aussi le moyen de déterminer pour combien compte une courbe singulière dans le nombre α, α',... auquel elle appartient.

Comme les recherches, dans la première *Partie*, sur la formation de nouveaux points singuliers ou de nouvelles tangentes singulières peuvent avoir un intérêt spécial, j'en ai rendu les résultats visibles par des figures (Planches I-III).

Les vingt-huit équations que nous venons de nommer ne forment qu'un système de vingt-trois équations indépendantes. Elles peuvent servir à exprimer vingt-trois des nombres μ, μ', b, b', c, c', p, p', q, q', u, u', v, v', x, x', y, y', z, z', α_0, α_1, α_2, α'_0, α'_1, α'_2, β, β', γ_0, γ_1, γ'_0, $(2d)$, (de), $(2e)$, $(3d)$, $(3d')$, $(2de)$, $(2d'e')$, $(d2e)$, $(d'2e')$ linéairement par les dix-sept autres, qu'on peut ainsi regarder comme les caractéristiques des systèmes qui ne présentent pas d'autres courbes singulières que celles que nous avons nommées. Le principe de correspondance peut servir à exprimer les nombres des courbes du système qui satisfont à une condition donnée li-

néairement par ces dix-sept caractéristiques. J'en ai donné quelques exemples (IIe *Partie*). Dans le cas où la condition nouvelle est un contact avec une courbe indépendante des conditions du système, le nombre cherché ne dépendra que des deux caractéristiques μ et μ' : il est égal à $a'\mu + a\mu'$, a et a' étant l'ordre et la classe de la courbe donnée (théorème de M. Chasles).

Pour rendre nos formules applicables à des systèmes où il existe d'autres courbes singulières (et où le nombre des caractéristiques est, par conséquent, plus grand), il suffit d'y ajouter des termes formés des nombres de ces nouvelles courbes multipliés de coefficients numériques (¹). On détermine ces coefficients par les mêmes principes que les autres coefficients de nos formules. Dans le dernier numéro de la *deuxième Partie*, je considère un exemple où ces nouveaux coefficients sont faciles à déterminer, celui où les courbes du système sont les projections centrales des sections faites dans une surface donnée par les plans d'un faisceau. En étendant mes formules au cas où le système contient, à côté des courbes singulières dont nous avons déjà parlé, une droite n-uple, j'obtiens une démonstration des formules de MM. Salmon et Cayley, exprimant les dépendances des nombres des singularités d'une surface algébrique.

Les courbes singulières auxquelles j'ai eu égard dans les formules nommées ci-dessus appartiennent à celles que j'appelle *courbes singulières ordinaires*, en désignant de cette manière celles qu'on rencontre dans les systèmes dont les conditions données sont des contacts avec des courbes indépendantes entre elles. Mais il existe encore d'autres courbes singulières ordinaires, dont nous n'avons pu nous occuper dans les précédentes recherches générales, parce qu'elles sont différentes pour les différentes valeurs de n, d et e : ce sont les *courbes à branches multiples* (²). Dans la *troisième Partie* de mon Mémoire, je m'occupe des courbes à

(¹) Comme dans les termes déjà considérés, ces coefficients peuvent dépendre de n, d, e, etc.

(²) Les courbes dont nous avons désigné les nombres par α et α' appartiennent en quelque sorte à cette catégorie. Les courbes α en sont même les seules, si les courbes du système doivent passer par un nombre suffisant de points indépendants entre eux, et en général si elles sont données par une équation en coordonnées-points; ce sont les courbes α' dans les cas réciproques. Alors nos équations seront applicables sans termes supplémentaires.

branches multiples, qu'on trouve *ordinairement* dans les systèmes de courbes du *troisième* ou du *quatrième ordre;* j'étudie leurs propriétés et celles de leurs courbes voisines dans les systèmes (une partie de ces propriétés est rendue visible par les figures des Planches IV et V), et j'applique ces résultats à la détermination des termes auxquels elles donnent lieu dans les équations dont nous avons parlé ([1]).

Je me borne à indiquer ici quelles sont les courbes singulières ordinaires des systèmes de courbes *générales* du quatrième ordre ($n = 4$, $d = e = 0$). On trouve dans ces systèmes :

ξ courbes composées d'une conique et d'une droite double, et ayant des sommets ([2]) doubles aux points d'intersection de ces deux parties et six sommets simples sur la droite double ([3]);

η courbes composées d'une conique et d'une droite double qui lui est tangente, et ayant un sommet triple au point de contact et sept sommets simples sur la droite double;

ζ courbes composées de deux droites simples et d'une droite double passant par leur point d'intersection, et ayant un sommet quadruple en ce point d'intersection et huit sommets simples sur la droite double;

$\varkappa$ courbes composées de deux droites doubles, et ayant un sommet triple à leur point d'intersection, six sommets simples sur l'une, trois sur l'autre des deux droites ([4]);

λ courbes composées d'une droite simple et d'une droite triple, et ayant un sommet double au point d'intersection et dix sommets simples sur la droite triple;

([1]) Quant aux courbes du troisième ordre, une partie de mes résultats n'est qu'une reproduction de ceux qui se trouvent dans des Mémoires antérieurs de M. Maillard et de moi-même. (Voir *Bulletin*, t. III.)

([2]) Un sommet est un point d'une courbe singulière, doué de la propriété que toute droite passant par lui est une tangente.

([3]) Je ferai observer que le nombre ν dont je parle dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* du 23 septembre 1872 est, à cause d'une manière différente de compter les courbes, égal à ce que j'appelle ici $\frac{\xi}{2}$.

([4]) M. *Cayley* avait antérieurement trouvé ces courbes $\varkappa$ (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences* du 11 mars 1872).

ν droites quadruples présentant douze sommets simples ;
θ coniques doubles présentant huit sommets.

Pour représenter algébriquement les courbes ξ, η, ζ et leurs courbes voisines, je prends pour axe des x la droite double, et je désigne par A_r, B_r,... des polynômes en x et y du degré r, et par a_r, b_r,... les polynômes en x qui en résultent pour $y = 0$; k est le périmètre variable du système, et ψ est une fonction de x, y, k, qui peut être irrationnelle en k, et qui ne devient pas infinie pour $k = 0$. Les courbes singulières correspondent à la valeur $k = 0$.

Les courbes ξ seront représentées par l'équation

$$A_2 y^2 + 2 B_3 y k + C_4 k^2 + \psi k^3 = 0,$$

et leurs six sommets simples seront déterminés par

$$b_3^2 - a_2 c_4 = 0.$$

Cette équation devient identique lorsque $a_2 = a_1^2$, $b_3 = a_1 b_2$, $c_4 = b_2^2$. Alors on obtient l'équation

$$(a_1 y + b_2 k)^2 + C_1 y^3 + C_2 y^2 k + C_3 y k^2 + C_4 k^3 + \psi k^4 = 0,$$

qui donne, pour $k = 0$, une courbe η, dont les sept sommets simples sont déterminés par l'équation

$$b_2^3 c_1 - a_1 b_2^2 c_2 + a_1^2 b_2 c_3 - a_1^3 c_4 = 0.$$

Si cette équation devient identique, on obtient l'équation

$$(a_1 y + b_2 k)^2 + 2 (c_0 y^2 + c_1 y k + c_2 k^2)(a_1 y + b_2 k)$$
$$+ d_0 y^4 + D_1 y^3 k + D_2 y^2 k^2 + D_3 y k^3 + D_4 k^4 + \psi k^5 = 0,$$

qui donne pour $k = 0$ une courbe ζ, dont les huit sommets simples se déterminent par l'équation

$$(b_2^2 c_0 - a_1 b_2 c_1 + a_1^2 c_2)^2 - (b_2^4 d_0 - a_1 b_2^3 d_1 + a_1^2 b_2^2 d_2 - a_1^3 b_2 d_3 + a_1^4 d_4) = 0,$$

En ayant égard aux cas où $b_3^2 - a_2 c_4 = 0$ devient identique d'une autre manière que celle que nous avons supposée, ou à celui où l'équation dernièrement trouvée devient identique, on parvient soit à des représentations de courbes singulières qui ne sont pas ordinaires, soit à de nouvelles représentations des courbes ξ, η, ζ, ou bien à des représentations de courbes qui comptent pour 2, 3,... courbes ξ, η, ζ.

Nous ne nous arrêterons pas ici à la représentation des courbes $\varkappa$, λ, ν, θ, qui n'est pas difficile.

Pour les systèmes de courbes du quatrième ordre douées de points singuliers, on trouve soit des modifications de ces mêmes courbes singulières, soit quelques nouvelles espèces ordinaires.

Nous ne nommerons ici que quatre des équations auxquelles nous sommes conduit par l'introduction des nouvelles courbes singulières; ces quatre équations se rapportent toutes au cas de $n=4$, $d=e=0$:

$$(1)\quad\begin{cases} 6\mu = \mu' + 2\xi + 3\eta + 4\zeta + 3\varkappa + 6\lambda + 12\nu + 2\theta, \\ 22\mu' = \mu + 2b' + 3c' + \alpha + 2\xi + 2\eta + 6\zeta + 2\varkappa + \lambda + 2\theta, \\ 2\mu' + 12\mu = c' + 2\xi + 2\eta + 4\zeta + 2\varkappa + 12\lambda + 24\nu + 2\theta, \\ 2\mu' + 20\mu = 2b' + 4\xi + 6\eta + 4\zeta + 14\varkappa + 4\lambda + 24\nu + 10\theta. \end{cases}$$

On trouve, en éliminant μ', b', c',

$$(2)\quad \alpha = 27\mu - 20\xi - 32\eta - 46\zeta - 24\varkappa - 45\lambda - 72\nu - 14\theta.$$

Ce sont les formules (1) et (2), et les formules analogues pour les courbes du quatrième ordre à points multiples, qui m'ont servi dans la *quatrième Partie* de mon Mémoire *à déterminer les caractéristiques des systèmes élémentaires*. Si l'on pouvait déterminer d'une manière directe pour tous les systèmes élémentaires les valeurs de ξ, η, ζ, $\varkappa$, λ, ν, θ, les formules (1) suffiraient, parce que dans le système déterminé seulement par des points donnés $\mu=1$, et ensuite le μ' d'un système sera égal au μ du système précédent. Cette détermination directe est possible pour ξ, η, ζ, $\varkappa$, θ; toutefois les recherches géométriques et même les calculs sont tellement pénibles, qu'on a besoin de pouvoir contrôler chaque pas qu'on fait [1]. Mais, quant aux nombres λ et ν, ils sont composés de termes contenant des coefficients pour la détermination desquels je ne connais aucun moyen direct. Une des causes de ces coefficients est la circonstance

[1] C'est même par ces moyens de contrôle numérique que j'ai trouvé l'*existence* des courbes η et ζ, et la plupart des coefficients de (1) et (2), avant d'en connaître aucune représentation ou déduction directe. On a ainsi un exemple des services que, dans beaucoup de questions, la Géométrie numérique peut rendre aux autres parties de la Géométrie, notamment à la Géométrie infinitésimale.

que, pour les courbes λ et ν, les situations des sommets ne sont pas indépendantes entre elles ; les coefficients seront égaux aux degrés des équations qui expriment ces dépendances, par rapport aux différentes quantités qui y entrent (ou à des multiples de ces degrés).

J'ai donc eu recours à l'équation (2), mais pour en tirer les valeurs de α il a fallu déterminer antérieurement les caractéristiques des systèmes élémentaires de courbes du quatrième ordre, à un point double libre, placé sur une droite ou en un point donné. Ces recherches demandent d'autres recherches antérieures, de façon que, pour parvenir aux caractéristiques des systèmes élémentaires de courbes générales du quatrième ordre ($n = 4, d = 0$, $e = 0$), il m'a été nécessaire d'étudier successivement les suites des systèmes élémentaires suivants : 1° ($n = 4$, $d = 3$, $e = 0$); 2° ($n = 4$, $d = 2$, $e = 0$); 3° les systèmes $n = 4$, où il y a un point de contact de deux branches ; 4° et 5° les systèmes ($n = 4$, $d = 2$, $e = 0$), où un des points doubles est fixe ou se trouve sur une droite; 6°, 7° et 8° les systèmes ($n = 4$, $d = 1$, $e = 0$), point double fixe, sur une droite libre; et enfin 9° les systèmes ($n = 4$, $d = e = 0$) eux-mêmes. Dans les cas où je ne le dis pas expressément, j'ai pu me passer de considérer séparément les systèmes où la situation des points singuliers est assujettie à des conditions, mais les résultats qui y ont rapport se présentent là d'eux-mêmes.

La série de résultats qu'on obtient ainsi donne le moyen de trouver aussi, sans de nouvelles difficultés, mais non pas sans augmentation de travail, les caractéristiques élémentaires des systèmes de courbes du quatrième ordre qui restent encore.

Le travail, qui a été très-pénible dans ces recherches, augmenterait d'une manière très-considérable si l'on voulait s'occuper de même des courbes d'un ordre plus élevé ; mais quand même on ne se laisserait pas rebuter par ce travail, ou qu'on trouverait des moyens de le réduire, il faudrait encore avoir à sa disposition de nouveaux moyens pour déterminer les coefficients analogues à ceux de λ et ν dont nous avons parlé, car le nombre de ces coefficients augmentera dans une proportion plus forte que celui des équations servant à les déterminer.

Je me permets d'ajouter encore que j'ai essayé par le *Résumé en*

français, dont les numéros correspondent à ceux du Mémoire, d'expliquer toutes les formules et tous les résultats numériques du Mémoire, et de montrer, du moins, les voies qui y conduisent.

H. Z.

FRISCHAUF (J.), Professor an der Universität Graz. — ABSOLUTE GEOMETRIE, NACH JOHANN BOLYAI. — Leipzig, Verlag von B.-G. Teubner, 1872. — 1 vol. in-8°, XII-96 p.

L'auteur de cet opuscule a eu principalement pour but de faire connaître les travaux qu'ont laissés deux des fondateurs de la Philosophie géométrique moderne, J. Bolyai et W. Bolyai (père du précédent), par une traduction libre, remaniée et simplifiée, de l'Ouvrage capital de J. Bolyai et de quelques parties des Œuvres de son père.

M. Frischauf a rendu ainsi aux lecteurs allemands le service que M. Hoüel rendit, il y a quelques années, aux lecteurs français, par une autre traduction publiée dans les *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, et par quelques extraits insérés dans son *Essai critique* sur les fondements de la Géométrie.

Si, écartant le point de vue historique, on voulait juger les Ouvrages de J. et de W. Bolyai, même remaniés par M. Frischauf, avec les idées actuelles, on ne pourrait s'empêcher de les trouver un peu arriérés.

Une exposition scientifique des principes fondamentaux de la Géométrie, écrite aujourd'hui, différerait probablement de celle des deux géomètres hongrois par les points suivants : on y apporterait plus de rigueur dans l'établissement des principes antérieurs à l'axiome XI d'Euclide ; une fois ces principes admis, on ne recourrait plus aux trois dimensions pour la recherche des lois de la Géométrie plane ; enfin on déduirait d'une même théorie les *trois* systèmes de Géométrie possibles, dont le dernier a été signalé par Riemann, tandis que J. Bolyai n'en trouve que deux.

Mais ce n'est point là une critique adressée, soit aux auteurs des méthodes exposées, soit à leur commentateur. Les premiers ont plus fait par eux-mêmes, pour l'établissement rigoureux des fonde-

ments de la Géométrie, qu'ils n'ont laissé à faire à leurs successeurs. Le dernier a écrit un Livre digne d'éloges, que nous considérons surtout comme un hommage rendu à deux mathématiciens de génie, dont le nom doit rester dans l'histoire de la Science.

D. T.

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

PERIODICO DI SCIENZE MATEMATICHE E NATURALI PER L'INSEGNAMENTO SECONDARIO. Pubblicato per cura dei Signori A. ARMENANTE, E. BERTINI, D. BESSO, E. DE MONTEL, L. PINTO, F. RODRIGUEZ, L. DE SANCTIS. — Roma, all'Uffizio di Redazione del Periodico ([1]).

1re année ; 1873-1874.

PROGRAMME, *par la Rédaction.*

BESSO (D.). — *Quelques observations sur l'enseignement du théorème de Pythagore.* (5 p.)

MONTEL (E. DE). — *Notions sur la résultante, avec quelques applications.* (10 p.)

L'auteur traite de la condition de compatibilité des trois équations

$$ax + by + c = 0, \quad a'x + b'y + c' = 0, \quad a''x + b''y + c'' = 0,$$

et il en donne l'application à la théorie de l'involution.

BESSO (D.). — *Sur quelques préjugés mathématiques.* (12 p.)

Cette Note a pour but de prémunir les commençants contre certaines erreurs assez fréquentes, contre celle, entre autres, qui con-

([1]) Nous nous empressons de signaler à nos lecteurs cette publication, qui témoigne chez les professeurs italiens d'une préoccupation touchant les méthodes d'enseignement et de perfectionnement des programmes, qu'on ne rencontre malheureusement pas dans tous les pays. Ce Journal paraît par fascicules mensuels de deux feuilles in-8°. Prix de l'abonnement, pour l'Italie, 8 fr.; pour la Suisse, 9 fr.; pour l'Autriche, la France et l'Allemagne, 10 fr. — Le premier numéro a paru en juin 1873. Nous analyserons seulement les articles relatifs aux Mathématiques.

siste à attribuer à toutes les opérations la propriété distributive

$$f(a+b)=f(a)+f(b),$$

et à en déduire à tort la proportionnalité entre des grandeurs qui dépendent entre elles suivant toute autre loi.

CREMONA (L.). — *Corrections aux « Elementi di Geometria projettiva* (¹). » (2 p.)

BERTINI (E.). — *Deux mots sur l'enseignement de la Géométrie dans les lycées.* (5 p.)

JUNG (G.). — *Lettre à M. Bertini.* (4 p.)

On sait que l'administration de l'Instruction publique, en Italie, voulant réagir contre la méthode indécise qui règne dans la plupart des Traités de Géométrie écrits depuis un siècle, a imposé, comme code d'enseignement, les *Éléments d'Euclide,* dont une traduction littérale a été éditée en 1867 par les soins de MM. Betti et Brioschi. Il a été recommandé aux professeurs de se conformer scrupuleusement, sinon à la lettre, du moins à l'esprit de ce chef-d'œuvre des temps antiques. Cette mesure a provoqué la rédaction de plusieurs Traités, conçus dans l'esprit euclidien, notamment du livre de MM. Sannia et d'Ovidio, dont nous avons rendu compte (²).

Une telle décision devait naturellement rencontrer des adversaires, et les Notes de MM. Bertini et Jung ont pour but de répondre aux objections anti-euclidiennes. Suivant ces deux savants professeurs, ce qu'il y a de mieux à faire, c'est de suivre exactement le texte d'Euclide, au moins pour les six premiers Livres, et ils apportent à l'appui de leur opinion des raisons dont plusieurs sont parfaitement fondées, mais qui, à notre avis, prouvent seulement une chose : c'est que la plupart des Traités modernes sont en arrière de celui d'Euclide, et que, loin de suivre le progrès des branches supérieures des Mathématiques, la Géométrie élémentaire a reculé, sous le rapport de la rigueur des principes, et souvent même dans les détails d'exposition. C'était dès lors faire un pas en avant que de revenir à Euclide; mais ce pas doit-il être considéré comme suf-

---

(¹) Voir *Bulletin,* t. V, p. 10.
(²) Voir *Bulletin*, t. I, p. 329.

fisant, et l'état présent de la science permet-il de s'en contenter? Nous ne le pensons pas.

Nous adoptons entièrement les raisons qui ont fait abandonner les méthodes dont l'Ouvrage de Legendre offre le type le plus célèbre. Pour le choix des axiomes fondamentaux, pour l'enchaînement des premières propositions, pour la rigueur dans la théorie des proportions, la supériorité appartient certainement à Euclide. On peut encore reprocher à Legendre d'avoir donné à ses démonstrations une tournure trop arithmétique, qui, tout en facilitant le passage aux applications métriques, fait trop souvent perdre de vue la figure et ses propriétés. On a, depuis, modifié la théorie de la proportionnalité, en la rendant plus conforme aux méthodes modernes (1); mais nous concevons, sans les partager entièrement, les regrets des partisans absolus de la pureté géométrique des méthodes. Il faut voir seulement s'il est bien avantageux d'y demeurer fidèle, coûte que coûte (*a qualunque costo*), et si l'on n'a pas eu souvent raison de s'en écarter.

Notre conviction est que, au lieu de s'attacher à creuser une ligne profonde de démarcation entre deux méthodes faites pour s'éclairer mutuellement, on devrait, au contraire, tendre de toutes ses forces à les unifier, en les combinant et les comparant, en montrant, toutes les fois qu'il y a lieu, l'identité des procédés cachée sous la variété des symboles, et, lorsque les deux méthodes s'écartent réellement, en faisant comprendre les raisons de cet écart, et pesant les avantages qu'elles peuvent avoir l'une sur l'autre. Ce qui importe, en effet, dans l'éducation, c'est bien plus l'étude des procédés généraux que celle des vérités particulières, auxquelles on doit seulement faire jouer le rôle d'exemples. C'est par là que l'esprit peut acquérir cette aptitude à la généralisation, qui doit être le but suprême de l'enseignement secondaire.

Notons, pour terminer, que la plupart des reproches adressés à la méthode dite *arithmétique* ont la même source que la confusion en vertu de laquelle on regarde souvent l'Algèbre comme une simple extension de l'Arithmétique et non comme la science de la comparaison des grandeurs considérées en elles-mêmes, indépendamment de toute représentation numérique. Si l'on se place au point de vue

---

(1) *Voir*, par exemple, les *Éléments de Géométrie* de MM. Rouché et de Comberousse.

de cette conception générale de l'Algèbre et de ses opérations, la forme algébrique donnée aux démonstrations géométriques n'est autre chose que l'emploi d'une écriture plus claire que le langage ordinaire; les opérations algébriques sont des indications abrégées de constructions, et doivent toujours rappeler l'idée d'une figure. Ce rapprochement constant du symbole numérique et de sa réalisation graphique habituera réciproquement à l'emploi de la *notation géométrique,* dont l'Analyse moderne tire un si grand parti. Enfin on devra rechercher toutes les occasions d'initier de bonne heure les élèves à la notion si délicate et si essentielle de *limite,* et c'est dans le rapprochement des considérations arithmétiques et géométriques que l'on trouvera le moyen le plus efficace d'atteindre ce but.

Notre conclusion est donc qu'Euclide a composé un livre admirable qui, aujourd'hui encore, peut être consulté avec profit, mais qui est loin de répondre au niveau de la Science actuelle. Les illustres savants qui ont décidé son introduction dans les écoles étaient mieux que personne en état de composer eux-mêmes un Traité unissant à la rigueur d'Euclide la largeur de vues de la Géométrie moderne; ils auraient offert à l'intelligence des jeunes gens une gymnastique non moins profitable, en les conduisant plus loin par une route plus aisée.

De Montel (E.). — *Notions sur la résultante, avec quelques applications.* (2e art., 10 p.)

Suite de l'involution. Équations à trois inconnues.

Valeriani (V.). — *Lettre à M. Bertini.* (18 p.)

L'auteur de cette Lettre expose les objections auxquelles lui paraît sujette l'adoption pure et simple des *Éléments d'Euclide* comme texte d'enseignement. Il considère le second Livre comme le seul qui soit sans défaut; les Livres I, III et IV auraient besoin de modifications, lesquelles pourraient d'ailleurs se faire sans altérer l'esprit général de l'Ouvrage; mais il serait d'avis de rejeter complétement l'exposition des proportions, telle qu'elle se trouve dans le Livre V. Nous aurons occasion, un peu plus loin, de revenir sur cette question.

Laudi (V.). — *Durée de l'oscillation du pendule cycloïdal et du pendule circulaire.* (5 p.)

Jung (G.). — *Notions élémentaires sur les limites.* (15 p.)

Exposition élémentaire de la théorie des limites, destinée à combler une lacune fâcheuse qui existe dans la plupart des Traités d'Algèbre. L'auteur prend, comme premier exemple, le *nombre irrationnel* $\sqrt{75}$. Il nous semble toutefois qu'un tel symbole ne peut être défini exactement que par des considérations fondées sur la théorie même des limites, de sorte que cet exemple aurait été mieux placé après qu'avant l'exposition de cette théorie. Il eût peut-être mieux valu indiquer l'exemple d'un quotient périodique, ou celui de la construction d'un carré équivalant à un rectangle de côtés égaux à 5 et à 15.

Mollame (V.). — *Expression du rapport entre deux états d'une grandeur (ou de deux grandeurs homogènes) au moyen d'une série.* (15 p.)

En déterminant les nombres q, m_1, m_2, ... par les équations

$$A = Bq + r_1, \quad B = m_1 r_1 - r_2 = m_2 r_2 - r_3 =, \ldots,$$

on trouve, pour l'expression du rapport de A à B,

$$\frac{A}{B} = q + \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_1 m_2} + \frac{1}{m_1 m_2 m_3} + \ldots,$$

avec une erreur que l'on peut évaluer.

Arzelà (C.). — *Exposition de quelques points d'Algèbre élémentaire.* (4 p.)

Sur la notion des quantités négatives, fondée sur la généralisation de la définition de la soustraction, considérée comme correspondant à un mouvement en sens inverse de celui qui répond à l'addition.

Besso (D.). — *Sur la notion d'équation.* (4 p.)

Bertini (E.). — *Le cinquième Livre d'Euclide.* (50 p.)

Malgré notre admiration profonde pour la théorie si ingénieuse d'Euclide, nous n'en considérons pas moins cette théorie comme trop difficile pour les élèves, malgré le talent qu'a déployé M. Bertini pour en faciliter l'accès. Nous savons que les auteurs des programmes scolaires ont eu pour but principal de faire de la Géométrie une gymnastique intellectuelle; mais, pour l'esprit comme pour le corps, la meilleure gymnastique est-elle toujours la plus fatigante? Et

d'ailleurs est-ce un bon moyen de stimuler le zèle des jeunes gens que de leur faire suivre une voie qui n'est qu'une impasse? Nous demandons à tous les géomètres si la méthode moderne des limites, dont M. Jung a fait sentir toute l'importance dans un article que nous citions tout à l'heure, n'est pas un aussi beau sujet d'étude, à tous les points de vue, que les méthodes particulières des anciens, qui n'ont pas d'application en dehors de l'objet restreint en vue duquel elles ont été créées. La méthode des limites présente, il est vrai, ses difficultés, comme le cinquième Livre d'Euclide; mais ce sont des difficultés qui n'ont rien à faire avec la mémoire, et qui disparaissent lorsqu'on les a expliquées sur un grand nombre d'exemples. Aussi est-il convenable de commencer cette étude le plus tôt possible, et la théorie des grandeurs proportionnelles en offre une occasion on ne peut plus favorable.

Euclide ne définit point ce que c'est qu'un rapport : il définit seulement l'égalité des rapports. Il y a beaucoup de quantités, telles que les longueurs, les angles, les temps, etc., dont il est impossible de définir la nature, et dont on doit se contenter de définir l'égalité; mais, du moins, ces quantités nous sont révélées par les sens d'une manière quelconque, et nous savons de quoi l'on nous parle. Il n'en est pas de même de la notion abstraite de rapport, qui ne s'applique à aucun objet connu, et, si on ne la définit pas d'une manière quelconque, l'égalité et l'inégalité des rapports ne seront pour nous que des mots. Comment convient-il de définir le rapport?

L'idée de proportionnalité étant une des plus importantes de toutes les Mathématiques, il ne faut pas craindre de consacrer à son exposition de longs développements. On commencera par le cas simple des rapports de grandeurs commensurables, qui, grâce aux progrès qu'a faits l'Arithmétique pratique depuis Euclide, ne peut offrir de difficulté. On définira ensuite, dans le cas de l'incommensurabilité, le *rapport approché*, c'est-à-dire le rapport de deux grandeurs commensurables différant respectivement des grandeurs données aussi peu que l'on voudra. Le rapport de deux grandeurs sera dit égal à celui de deux autres lorsque, à chaque détermination du rapport approché des deux premières, correspondra une détermination égale du rapport approché des deux autres.

L'exposition de cette théorie n'est pas, au fond, plus arithmétique que celle d'Euclide; elle peut se fonder, comme elle, sans que l'on

sache effectuer la division des quantités concrètes en un nombre quelconque de parties égales, et elle repose essentiellement sur le principe des limites. On peut y employer, avec grand avantage, le secours des figures, dont M. Bertini a fait un très-heureux emploi dans son travail, en les diversifiant comme lui, et représentant les quantités variables, soit par des lignes, soit par des angles, des aires, etc.

M. Bertini a donné au cinquième Livre d'Euclide un complément important, en y joignant la théorie de la proportionnalité entre deux grandeurs variables, théorie qu'il a traitée par la méthode purement euclidienne. Grâce à lui, on pourra maintenant prendre plus facilement connaissance de la remarquable méthode du géomètre alexandrin, que tout professeur doit avoir étudiée au moins une fois dans sa vie. Pour les commençants, c'est autre chose; nous ne voudrions pas plus la leur imposer qu'introduire la lecture d'Archimède dans l'enseignement de l'École Polytechnique. Nous préférons *à tous les points de vue* les Mathématiques modernes, qu'il ne faut pas accuser des méfaits de ceux qui sont chargés de les enseigner.

Ziletti (V.). — *Conditions pour que deux grandeurs soient proportionnelles.* (7 p.)

L'auteur expose la méthode donnée dans le Traité de MM. Rouché et de Comberousse. J. H.

ARCHIV der Mathematik und Physik, mit besonderer Rücksicht auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten. Gegründet von J.-A. Grunert, fortgesetzt von R. Hoppe [1].

T. LV; 1873.

Curtze (M.). — *Johann-August Grunert.*

Nous avons publié une traduction de cette Notice dans le *Bulletin,* t. III, p. 285.

Wangerin (A.). — *Sur un nouveau mode de représentation conforme d'un plan sur un autre.* (14 p.)

---

[1] Voir *Bulletin,* t. IV, p. 278.

Lagrange a démontré, dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin* pour 1779 ([1]), que, si les points (x, y), (t, u) de deux plans sont liés par une relation de la forme

$$x + iy = f(t + iu),$$

où $i = \sqrt{-1}$: 1° le rapport des longueurs ds, $d\sigma$ des éléments infiniment petits, pris à partir de deux points correspondants, ne dépend que de la position de ces points, et non de la direction de ces éléments; 2° deux éléments ds, ds' du premier plan font entre eux le même angle que leurs correspondants $d\sigma$, $d\sigma'$ du second plan; 3° aux parallèles aux axes coordonnés dans l'un des plans correspondent deux systèmes de courbes orthogonales dans l'autre plan.

On peut maintenant se proposer de déterminer la fonction f de telle manière qu'aux parallèles à l'axe des t dans un des plans corresponde un système donné de courbes dans l'autre plan.

Ce problème a été résolu dans plusieurs cas par Lagrange et par Gauss. M. Wangerin rappelle d'abord les solutions connues jusqu'ici. Il en expose ensuite une nouvelle, dans laquelle les courbes correspondant aux parallèles aux axes des t et des u sont, dans le plan des xy, deux systèmes de lemniscates non confocales.

Wangerin (A.). — *Sur quelques propriétés des lemniscates (courbes de Cassini).* (3 p.)

Obermann (J.). — *Théorie des vibrations longitudinales des verges composées.* (13 p.)

L'auteur traite le cas général du mouvement vibratoire longitudinal d'une verge formée d'un nombre quelconque de parties homogènes de substances différentes.

Hochheim (A.). — *Sur la surface gauche $z = My^2x$.* (14 p.)

Surface engendrée par une droite glissant sur une parabole dont le plan est parallèle à celui des yz, de manière à rencontrer constamment l'axe des y et à rester parallèle au plan des zx.

Hoppe (R.). — *Théorie des grandeurs infinies.* (10 p.)

Dans ce travail, déjà publié dans d'autres recueils, M. Hoppe rectifie les inexactitudes de langage ou de doctrine que l'on commet

---

([1]) *Œuvres de Lagrange*, t. IV, p. 637.

si souvent en traitant des infiniment petits et des infiniment grands, et qui ont jeté auprès de certains esprits un discrédit sur la méthode infinitésimale elle-même. On trouvera une exposition rigoureuse de cette méthode dans le *Traité de Calcul différentiel* publié par M. Hoppe, en 1865 (¹).

Worpitzky. — *Sur l'intégrale définie*

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{A + B\cos\varphi + C\sin\varphi},$$

A, B, C *étant des constantes quelconques, réelles ou complexes.* (7 p.)

Simony (O.). — *Solution simple du problème de représenter complétement* $\sqrt[3]{a+bi}$ *sous la forme* $x + yi$. (5 p.).

Simony (O.). — *Sommation de quelques séries finies et son application à la représentation des* $n^{\text{ièmes}}$ *puissances de* $\cos x$ *et de* $\sin x$ *par des sommes de fonctions semblables des multiples entiers de l'arc* x. (8 p.)

Hoppe (R.). — *Fondements cinématiques de la théorie des courbes.* (28 p.)

L'auteur remarque que la théorie des courbes dans l'espace a été jusqu'ici considérée comme plus compliquée que celle des surfaces. Le présent Mémoire est une introduction à une nouvelle exposition de cette théorie, qu'il se propose de publier plus tard, et dans laquelle cette théorie est ramenée à une simplicité comparable à celle de la Statique analytique. Ici il étudie les figures à paramètre variable, qui peuvent engendrer, par leurs intersections successives, soit un plan, soit une droite.

Franz (J.). — *Sur les rayons de courbure et les lignes de courbure d'une surface donnée en coordonnées planaires homogènes.* (8 p.)

Wangerin (A.). — *Sur le problème de l'équilibre des corps élastiques de révolution.* (34 p.)

On connaît depuis longtemps les équations générales de l'équi-

(¹) *Lehrbuch der Differentialrechnung und Reihentheorie, mit strenger Begründung der Infinitesimalrechnung.* Berlin; 1 vol. in-8°.

libre des corps élastiques; mais jusqu'ici le nombre des applications de ces équations à des corps déterminés est relativement peu considérable. On a traité les cas où les corps peuvent être envisagés comme n'ayant qu'une ou deux dimensions, et les cas des corps ayant la forme de parallélépipèdes, de cylindres, ou de couches comprises entre deux sphères concentriques; et l'on peut consulter à ce sujet les travaux de Clebsch, de Lamé, de Thomson, de Hoppe. Dans le présent Mémoire, l'auteur a étendu ses recherches au cas d'un corps de révolution quelconque. Il a d'abord cherché à résoudre le problème relatif à une couche comprise entre deux sphères concentriques. Cette question résolue, il a passé aux cas d'un anneau circulaire et d'un ellipsoïde de révolution, pour lesquels on connaît la solution de l'équation du potentiel. Au moyen de ces cas particuliers, il est arrivé à ce résultat plus général : « Les équations différentielles qui déterminent l'état d'équilibre élastique d'un corps de révolution quelconque d'élasticité constante peuvent s'intégrer quand on connaît la solution de l'équation du potentiel pour ce corps. » Le problème de l'équilibre élastique d'un corps de révolution est ainsi ramené à l'intégration de l'équation du potentiel.

Günther (S.). — *Considérations mathématiques sur un passage de Pline.* (16 p., 1 pl.)

Pline raconte, au Livre XXXVI de son *Historia naturalis,* que Curion bâtit à ses frais un théâtre dont la disposition ingénieuse est décrite en ces termes : « Il fit construire deux théâtres en bois, très-spacieux et juxtaposés, chacun en équilibre et tournant sur un pivot : avant midi, pour le spectacle des jeux, ils étaient adossés, afin que le bruit de l'une des deux scènes ne gênât pas l'autre; l'après-midi, tournant tout à coup, ils se trouvaient face à face, les fonds se séparaient, les angles se réunissaient, et il se formait un amphithéâtre pour des gladiateurs.... » [1].

Le comte de Caylus est le premier qui ait essayé d'expliquer cette construction, sans y réussir entièrement. Après lui est venu le célèbre architecte Weinbrenner, qui a trouvé que le théâtre devait être formé de deux moitiés d'ellipse. M. Günther reprend la question, et la discute complétement, tant par l'Analyse que par des considérations de Géométrie élémentaire.

---

[1] *Histoire naturelle;* traduction de Littré.

Günther (S.). — *Sur quelques problèmes de Géométrie supérieure.* (12 p.)

L'auteur traite d'abord le problème des corrections qu'il faut apporter aux erreurs d'observation provenant de l'ellipticité des tourillons d'un instrument astronomique. Il s'occupe ensuite des problèmes qui sont des généralisations du premier, relatives aux espaces à trois et à n dimensions.

Affolter (Fr.-G.). — *Sur la théorie de la conchoïde.* Première Partie. (14 p., 1 pl.)

Étude géométrique de cette courbe.

Hochheim (A.). — *Sur les nombres figurés.* (4 p.)

Simony (O.). — *Décomposition de l'intégrale*

$$U = \int \frac{x^\alpha dx}{\sqrt[3]{(a + bx + cx^2)^\beta}},$$

en intégrales elliptiques des trois espèces, en supposant que α, β *soient des nombres entiers quelconques, positifs ou négatifs, et* a, b, c *des quantités différentes de zéro.* (18 p.)

Mendthal. — *Démonstration géométrique de la construction de Steiner pour la solution du problème de Malfatti.* (4 p.)

Wangerin (A.). — *Représentation géométrique des racines de l'équation* $u^2 + v^2 = 0$.

Hoppe (R.). — *Application du théorème d'Euler sur les polyèdres.*

Ligowski. — *Le calcul du nombre* π : *contribution au calcul approximatif des intégrales définies.*

Ziegler (A.). — *Le « triangle extérieur », nouveau procédé pour l'étude de la Trigonométrie sphérique.* (4 p.)

Meissel (E.). — *Sur la diffusion dans l'espace des gaz complétement élastiques et de température constante.* (16 p.)

Meissel (E.). — *Sur l'écoulement de l'eau hors des vases dans deux cas particuliers, après l'établissement d'un état permanent.*

Gegenbauer (L.). — *Études sur les équations différentielles linéaires du second ordre.* (6 p.)

L'auteur cherche les conditions qui doivent être remplies : 1° pour que le produit de deux intégrales particulières d'une équation différentielle linéaire du second ordre soit une fonction donnée de la variable; 2° pour que le quotient de deux intégrales particulières soit une fonction donnée de la variable; 3° pour que deux intégrales particulières y_1, y_2 satisfassent à l'équation $\frac{y_1}{y_2^p} = C$.

Gegenbauer (L.). — *Contribution à la théorie des équations différentielles linéaires.* (26 p.)

L'auteur démontre les trois théorèmes suivants :

1. Si toutes les intégrales particulières d'une équation différentielle linéaire d'ordre n, à coefficients variables,

$$X_n y^{(n)} + X_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + X_0 y = 0 \tag{1}$$

sont des puissances d'une même fonction de la variable indépendante x, elles sont toutes de la forme

$$y = e^{C\int \sqrt[n]{\frac{X_0}{X_n}}\,dx}.$$

2. Si les rapports deux à deux des intégrales particulières de l'équation (1) sont des puissances de x, les intégrales particulières sont de la forme

$$y = x^p e^{-\int \frac{dx}{n x X_n}\left[x X_{n-1} + \left(p_1 + \ldots + p_n - \frac{n^2-n}{2}\right) X_n\right]}.$$

3. Si les mêmes rapports sont des puissances de e^x, les intégrales particulières sont de la forme

$$y = e^{px - \int \frac{dx}{n X_n}\left[X_{n-1} + (p_1 + \ldots + p_n) X_n\right]}.$$

Gegenbauer (L.). — *Note sur les séries hypergéométriques.* (6 p.)

Hain (E.). — *Sur les diviseurs d'un nombre.* (3 p.)

Fischer (F.-W.). — *Note sur les équations qui peuvent se ramener à des équations réciproques.* (8 p.)

Dostor (G.). — *Théorie générale des surfaces de révolution du second degré.* (17 p.; fr.)

Hoza (F.). — *Construction des lignes d'intensité dans le cas d'une illumination centrale.* (12 p., 3 pl.)

Hain (E.). — *Théorèmes sur le triangle.* (4 p.)

Eggers (H.). — *Sur l'involution.* (21 p.)
Précédé de *Remarques préliminaires,* par F. August. (4 p.)

Hoppe (R.). — *Sur le problème d'un système de surfaces triplement orthogonal.* (30 p.)

Si u, v, w sont les coordonnées rectangles du point d'intersection de trois surfaces

$$u = \text{const.},\quad v = \text{const.},\quad w = \text{const.},$$

dont les normales en ce point doivent être perpendiculaires deux à deux, les conditions d'orthogonalité seront exprimées par l'équation

$$\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial w} = 0,$$

et par deux autres analogues, et le problème consiste dans l'intégration du système de ces trois équations.

La solution générale du problème devrait contenir trois fonctions arbitraires de deux variables chacune. Le présent Mémoire contient seulement des solutions renfermant un plus grand nombre de fonctions d'une variable chacune (le plus souvent d'une des variables u, v, w elles-mêmes). Toutefois ces solutions particulières ne laissent pas d'être complètes dans l'étendue d'un certain domaine, défini par un caractère distinctif, et les résultats obtenus fournissent des classes déterminées de surfaces.

Günther (S.). — *Contributions à la théorie des fonctions continues.* (13 p.)

Worpitzky. — *Sur les principes fondamentaux de la Géométrie.* (17 p.)

L'auteur se propose de contribuer par ce travail à la délimitation définitive des axiomes et des théorèmes de la Géométrie, sujet qui a donné lieu à tant de controverses dans ces dernières années. Parmi les résultats auxquels il est parvenu, il mentionne les deux suivants : Par une meilleure définition de l'angle, il a démontré sans difficulté l'existence d'une surface qui contient tout

entière une droite quelconque ayant avec elle deux points communs. Ensuite il espère avoir fait faire un pas à la célèbre question des parallèles, en remplaçant l'axiome XI d'Euclide par un autre, qui lui semble plus évident, et qui consiste à admettre qu'*il n'existe aucun triangle dans lequel chacun des angles puisse être supposé moindre qu'un angle donné aussi petit que l'on voudra*. On sait, en effet, que l'existence d'un pareil triangle serait la conséquence rigoureuse de la fausseté de l'axiome XI. M. Worpitzky a certainement étudié avec soin tous les travaux publiés jusqu'ici sur la question. Aussi, tout en faisant des réserves sur quelques-unes de ses vues, nous recommandons vivement son article à l'attention de nos lecteurs.

Meutzner. — *Théorèmes sur le quadrilatère.* (4 p.)

Hoppe (R.). — *Démonstration du théorème de Crofton, sur le calcul direct des aires.* (3 p.)

Ce théorème avait été établi par M. Crofton [1], au moyen de considérations neuves et originales, qui faisaient désirer une vérification par les voies ordinaires du Calcul intégral. M. Serret y est parvenu dans un article inséré aux *Annales de l'École Normale supérieure*, t. VI [2], mais par une voie indirecte. Dans la présente Note, M. Hoppe démontre le théorème en suivant la marche de l'inventeur, et substituant seulement aux principes sur lesquels celui-ci s'appuie les procédés ordinaires du calcul des quadratures.

Björling (C.-F.-E.). — *Sur les relations qui doivent exister entre les coefficients d'un polynôme* F(x), *pour qu'il contienne un facteur de la forme* $x^n - a^n$. (12 p.; fr.)

Hoza (F.). — *Proposition de Géométrie.* (6 p.)

Westphal (M.). — *Flexion qu'un ressort courbé suivant une courbe plane quelconque, et déformé par deux forces égales et opposées, éprouve dans le sens de l'action des forces.* (2 p.)

---

[1] *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXV, p. 994.
[2] Voir *Bulletin*, t. I, p. 28.

BULLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E DI STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE, pubblicato da B. BONCOMPAGNI. — In-4° (1).

T. VI; 1873.

BERTELLI (le P.). — *Remarques historiques sur les recherches concernant les petits mouvements spontanés des pendules, faites depuis le* XVIIe *siècle jusqu'à nos jours.* (44 p.)

Les premières expériences sur ces mouvements ont été faites, au rapport de Gassendi, par un gentilhomme dauphinois, nommé Alexandre de Calignon Peirins, qui voulut constater si la cause qui produit les marées n'agit pas d'une manière analogue sur le fil à plomb. Il observa un mouvement elliptique, ayant une période de vingt-quatre heures.

Ces expériences, faites en 1643, furent reprises par J.-B. Morin, qui crut y trouver une preuve contre la rotation de la Terre. Le P. Mersenne essaya vainement de constater lui-même ces mouvements, et Caramuel de Lobkowitz, évêque de Vigevano, déclara fausses les observations de Calignon.

Mairan (2) après avoir résumé cette discussion, regarda comme inadmissibles les objections faites aux expériences de Calignon, et engagea les physiciens à les répéter. A cet effet, Lecat établit dans la cathédrale de Rouen un pendule de 127 pieds de longueur, dont il observa les déplacements pendant une année, et sa conclusion fut que ces mouvements n'avaient rien de régulier.

Le P. Bertelli mentionne encore les expériences faites vers la même époque par le baron de Grante, par Bouguer, par Toaldo, etc.; puis il arrive aux travaux modernes, parmi lesquels il cite en première ligne les études faites, dans le voisinage de la mer, par M. Ant. d'Abbadie. Outre certains mouvements périodiques, en relation avec les marées, on remarque d'autres déplacements irréguliers, qui paraissent être les effets affaiblis de tremblements de terre lointains.

BONCOMPAGNI (B.). — *Sur quelques annotations de Galileo Galilei à un Ouvrage de* Jean-Baptiste MORIN. (16 p.)

---

(1) Voir *Bulletin*, t. VI, p. 252.

(2) *Histoire de l'Académie des Sciences*, pour l'année 1742.

Sur un exemplaire, conservé à la Bibliothèque Nationale de Florence, d'un livre de Morin intitulé : « *Famosi et antiqui problematis de Telluris motu vel quiete hactenus optata solutio.* MDCXXXI », se trouvent des notes manuscrites, tracées, comme tout porte à le croire, de la main de Galilée, et qui ont pour objet de réfuter les objections de l'auteur contre le mouvement de la Terre. M. le prince Boncompagni donne une reproduction complète de ces Notes.

VIMERCATI (G.). — *Sur la première idée des chaudières tubulaires.* (4 p.)

BOUCHON-BRANDELY (G.). — *Quelques remarques sur deux articles du* Bullettino [1], *intitulés :* « Storia delle matematiche presso gli Arabi, dal Dr Ermanno HANKEL » *et* « Vite di matematici arabi, etc., con Note di STEINSCHNEIDER ». (4 p. ; fr.)

BIADEGO (G.). — *Sur dix lettres inédites de* Joseph-Louis LAGRANGE. (20 p.)

LAGRANGE. — *Dix lettres inédites de* Joseph-Louis LAGRANGE, *écrites au mathématicien véronais* Antonio-Maria LORGNA. (11 p. ; fr.)

BONCOMPAGNI (B.). — *Sur dix lettres de* Joseph-Louis LAGRANGE, *écrites en langue italienne.* (12 p.)

GENOCCHI (B.). — *Réclamation en faveur de* Félix CHIÒ. (6 p.)

BONCOMPAGNI (B.). — *Additions et corrections à l'article intitulé :* « *Sur une traduction latine de l'*Optique *de Ptolémée,* etc. ». (*Bullettino di Bibliografia,* etc., t. IV, p. 470) [2]. (12 p.)

BIERENS DE HAAN (D.). — *Notice sur des Tables logarithmiques hollandaises.* (36 p. ; fr.)

La découverte de Neper, publiée pour la première fois à Édimbourg, en 1614, a été introduite en Hollande par les efforts réunis du libraire mathématicien Adriaan Vlack [3] et de l'arpenteur Ézé-

[1] Voir *Bulletin,* t. VI, p. 254 et 255.

[2] Voir *Bulletin,* t. IV, p. 246.

[3] Dans les éditions imprimées par lui, son nom est écrit Vlacq. C'est à tort que l'on écrit souvent Ulacq.

chiel de Decker, qui firent paraître, en 1626, à Gouda, un volume in-4° intitulé *Nieuwe Telkonst,* contenant la traduction hollandaise de quelques Traités de Neper (*Rhabdologia, Arithmetica localis,* etc.), des Tables d'intérêts, et la réimpression de la *Dixme* de Simon Stevin. Ce volume devait être suivi d'un autre, qui aurait compris les autres Traités de Neper, avec les Tables logarithmiques de Briggs. En attendant la publication de ce volume, qui resta à l'état de projet, de Decker fit imprimer, sous le même titre *Nieuwe Telkonst,* un volume in-8° contenant les Tables des logarithmes de 10 000 premiers nombres à 10 décimales, d'après Briggs, avec les Tables des logarithmes trigonométriques à 7 décimales, d'après Edm. Gunter.

A la place de la seconde partie du *Nieuwe Telkonst*, Vlack donna au public son grand Ouvrage ([1]), où l'on trouve, pour la première fois, les logarithmes de 100 000 premiers nombres, calculés avec 10 décimales, et qui peut être considéré comme la source où sont venus puiser tous les auteurs des recueils logarithmiques qui ont paru dans la suite.

On sait aussi que c'est à Vlack que nous devons les plus anciennes Tables de logarithmes trigonométriques qui aient été calculées avec 10 décimales, de 10 en 10 secondes. Cet Ouvrage, publié en 1633 sous le titre de *Trigonometria artificialis,* a eu pour fâcheux résultat d'éterniser l'usage, si incommode et si illogique, de la division sexagésimale du cercle.

Dans la même année 1633, l'infatigable Vlack dirigeait l'impression d'un Ouvrage posthume de Briggs : la *Trigonometria Britannica,* dernière production du prodigieux calculateur anglais, et qui forme encore de nos jours le recueil de Tables trigonométriques le plus remarquable par son étendue et son exactitude. Ce Livre est généralement connu comme l'œuvre de H. Gellibrand, et M. Bierens de Haan partage sur ce point l'opinion accréditée. La vérité est, cependant, que Gellibrand est l'auteur de la *seconde partie de l'Introduction* qui précède les Tables, composition assez médiocre d'ailleurs. Quant aux Tables elles-mêmes, voici ce que Gellibrand lui-même en dit dans sa préface : « *Cum ante annos plus*

([1]) *Arithmetica logarithmica.* Gouda, in-fol.; 1628.

minus triginta, canonem hunc sinuum, ad quindecim loca, per æquationes algebraicas et differentias, ipsis sinubus proportionales, a primis fundamentis accurate extructum ABSOLVISSET (Briggius), etc. » Il résulte clairement de ces paroles que les Tables sont l'œuvre de Briggs, et que le nom de Gellibrand a été substitué à celui de l'inventeur, uniquement à cause d'une mauvaise disposition typographique du titre du Livre, qui met en vue le nom de l'éditeur plus que celui de l'auteur.

Briggs, d'après les suggestions de Viète, avait commencé à rompre avec la division sexagésimale du cercle. Seulement, comme il avait continué à prendre pour unité le degré et non le quadrant, son système eut le sort habituel des demi-mesures, et n'obtint que très-peu d'adhérents. La même chose est arrivée à la fin du siècle dernier, lorsque, au lieu de présenter la division décimale du quadrant sous son véritable jour comme la division *naturelle* qui s'impose à ce seul titre, on lui a donné l'aspect d'une division artificielle comme l'ancienne, ce qui a retardé d'un siècle son adoption.

Vlack a publié aussi des Tables abrégées, dont nous signalerons à M. Bierens de Haan une édition française, portant la date de la Haye, MDCLI.

L'article est terminé par de précieux renseignements bibliographiques sur les Tables logarithmiques du XVIIe et du XVIIIe siècle.

SÉDILLOT (L.-M.). — *Sur l'origine de la semaine planétaire et de la spirale de Platon.* (10 p.; fr.)

MANSION (P.). — *Les Mathématiques en Belgique en* 1872. (36 p.; fr.)

Cet article fait suite au *Rapport séculaire sur les travaux mathématiques de l'Académie royale de Belgique* (1772-1872) publié par notre collaborateur M. de Tilly.

Il est divisé en Chapitres, dont le premier résume les travaux d'Analyse, dus à MM. Catalan, Gilbert et Mansion. Le Chapitre II est consacré à la Géométrie, et rend compte des publications de MM. Saltel, Folie et Catalan. Dans le Chapitre III, intitulé *Mécanique,* M. Mansion analyse les Mémoires de M. Belpaire sur la Thermodynamique, de M. de Tilly sur la Mécanique appliquée, et de M. Folie sur le calcul de la densité de la Terre.

Günther (S.). — *Le développement historique de la théorie des polygones étoilés dans l'antiquité et au moyen âge.* (Traduit de l'allemand par A. Sparagna.) (28 p.)

Les Grecs n'ont eu aucune notion des polyèdres étoilés. Les polygones réguliers étoilés semblent avoir été considérés pour la première fois par les Pythagoriciens, qui avaient adopté le pentagone étoilé (πεντάγραμμον, πένταλφα) comme signe de ralliement, si nous nous en rapportons toutefois au dire de Lucien et du scoliaste d'Aristophane, et à l'anecdote racontée par Jamblique; mais alors on est forcé d'admettre que Pythagore connaissait la division d'une droite en moyenne et extrême (*sectio aurea*). Il a fallu pour cela qu'il en fît lui-même la découverte, cette construction étant fort au-dessus des connaissances géométriques des Égyptiens, ses maîtres. M. Günther considère toutefois cette découverte de Pythagore comme douteuse, quoiqu'elle soit étroitement liée à la construction du dodécaèdre régulier, que l'École pythagoricienne introduit dans son système d'harmonies célestes; il suppose que l'on se sera contenté d'abord d'une construction mécanique approchée. Les diagonales du pentagone régulier convexe, formant le pentagramme, ont suffi pour donner l'idée de cette figure; mais il n'était alors nullement question d'une théorie générale des polygones étoilés. On retrouve encore le pentagramme dans un passage de l'*Ars geometrica,* attribué à Boèce. Au moyen âge, on considérait cette figure comme douée de propriétés magiques.

Le premier qui ait donné une vraie théorie des polygones étoilés est l'anglais Adelhard, de Bath ([1]), dont les ouvrages sont restés manuscrits. M. Günther en transcrit un passage important, d'après un codex de la Bibliothèque de Nuremberg.

Boncompagni (B.). — *Sur un passage de la Géométrie de Boèce relatif au pentagone étoilé.* (16 p.)

Mansion (P.). — « *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique, par M. Hermite, membre de l'Institut, professeur à l'École Polytechnique et à la Faculté des Sciences.* Première partie. ([1]). » (48 p.; fr.)

([1]) Chasles, *Aperçu historique*, p. 509.

([2]) Voir *Bulletin*, t. V, p. 49.

Menabrea (L.-F.). — *Dernière Lettre à M. le prince Boncompagni sur les péripéties de la série de Lagrange, en réponse au professeur A. Genocchi.* (23 p.)

Friedlein (G.). — *Sur le géomètre Hypsiclès.* (37 p.; lat.)

On attribue généralement à Hypsiclès deux Livres, placés, dans la plupart des éditions d'Euclide, à la suite des treize Livres des *Éléments*, et désignés par les numéros XIV et XV. M. Friedlein n'admet pas que ces deux Livres puissent appartenir au même auteur, si même on peut donner le nom de Livre au dernier des deux, lequel est une réunion de trois groupes de propositions, qui ne se rattachent entre eux par aucun lien. Le premier groupe traite de l'inscription des polyèdres réguliers les uns dans les autres; le second, du nombre des côtés et des angles de ces polyèdres; le troisième contient les recherches d'Isidore, dont l'auteur se dit le disciple, sur les inclinaisons mutuelles des faces des mêmes solides. Le premier groupe paraît écrit d'une autre main que les deux autres, et par un auteur moins habile. En cela, les vues de M. Friedlein concordent avec celles que Peyrard indique au commencement de la Préface du tome III de son édition d'Euclide. Ce passage de Peyrard n'ayant pas attiré toute l'attention qu'il mérite, M. Friedlein reprend l'étude des deux Livres. Il reproduit, avec la traduction latine du premier, le texte grec, corrigé d'après diverses éditions et d'après un manuscrit de la Bibliothèque de Munich, inconnu à Peyrard. Pour le second, il donne seulement la traduction latine. Il conclut de son examen que le premier de ces deux opuscules peut à bon droit être attribué à Hypsiclès, qui vivait dans le IIe siècle avant J.-C.; quant au second, il lui semble devoir être rejeté jusqu'au IVe ou au Ve siècle après J.-C., et cette composition, œuvre de deux auteurs différents, n'a aucune valeur réelle.

Genocchi (A.). — *Courte réplique à M. le comte L.-F. Menabrea.* (3 p.)

D. C. — *Sur un Mémoire du professeur D. Chelini D, S. P., intitulé : « Interprétation géométrique de formules essentielles aux sciences de l'étendue, du mouvement et des forces.* (6 p.) »

Cette Note contient la reproduction en fac-simile d'une lettre de Poinsot au P. Chelini, relativement aux premiers travaux de celui-ci. Nous reviendrons sur cet important Mémoire.

Boncompagni (B.). — *Additions et corrections à l'article intitulé : « Sur dix Lettres en langues italienne de* Joseph-Louis Lagrange ».

Boncompagni (B.). — *Additions et corrections à l'article intitulé : « Sur un passage de la Géométrie de Boèce relatif au pentagone étoilé* ». (1 p.)

— Le *Bullettino* donne tous les deux mois un Catalogue très-détaillé des principaux Ouvrages publiés sur les Sciences mathématiques et physiques, et des articles contenus dans les Recueils scientifiques les plus importants. Ce précieux complément de la publication de M. le prince Boncompagni occupe 189 pages du présent volume. J. H.

VERSLAGEN EN MEDEDEELINGEN der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. Tweede Reeks (¹).

T. IV; 1869.

Baehr (G.-F.-W.). — *Sur le mouvement dans un milieu dont la résistance est proportionnelle au cube de la vitesse.* (11 p.)

Les expériences de tir horizontal, faites à Woolwich par le professeur Bastforth (²), ont donné pour résultat, entre le temps t et l'espace s, une relation de la forme

$$t = as + bs^2,$$

et par suite, pour l'accélération, une valeur

$$f = \frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{2b}{(a+2bs)^3} = -2bv^3,$$

proportionnelle au cube de la vitesse v. Cette loi s'accorde d'une manière satisfaisante, dans le cas des grandes vitesses, avec les expériences faites à l'École d'artillerie de Metz. M. Baehr établit,

---

(¹) Voir *Bulletin*, t. I, p. 186.

(²) *Philosophical Transactions*, p. 417; 1868.

d'après cette hypothèse, une formule qui permet de calculer directement le coefficient de résistance $2b$, étant données la direction et la grandeur de la vitesse initiale, avec la projection horizontale de l'arc. L'application de cette formule à divers cas a donné des résultats concordants.

BOSSCHA (J.) jr. — *Sur la dilatation vraie du mercure, d'après les expériences de Regnault.* (31 p.)

BOSSCHA (J.) jr. — *Sur la dilatation apparente du mercure et la marche du thermomètre à mercure, comparée avec celle du thermomètre à air, d'après les expériences de Regnault.* (22 p.)

OUDEMANS (J.-A.-C.). — *Rapport sur l'observation de l'éclipse de Soleil du* 18 *août* 1868, *dans quatre stations de l'Archipel des Indes.* (30 p.; 3 pl.)

VAN DIESEN (G.). — *Calcul de la quantité d'eau qui peut couler dans les hautes eaux, à travers les sections actuelles du Bas-Rhin et du Lek.* (35 p.)

BAEHR (G.-F.-W.). — *Remarque sur une relation entre les racines et les coefficients de l'équation générale du second degré.* (2 p.)

V_n étant la différence entre les $n^{\text{ièmes}}$ puissances des racines de l'équation $x^2 + px + q = 0$, on a la relation

$$V_n = -p V_{n-1} - q V_{n-2},$$

d'où l'on tire l'expression générale de V_n.

STIELTJES (T.-J.). — *Sur des expériences d'Hydraulique.* (21 p.)

OUDEMANS (J.-A.-C.). — *Hypothèse sur la couronne lumineuse dans les éclipses totales de Soleil.* (4 p.)

BERGSMA (P.-A.). — *Sur la variation diurne de l'inclinaison magnétique à Batavia.* (8 p.)

VAN DER WILLIGEN (V.-S.-M.). — *Quelques remarques concernant la machine électrique de Holtz.* (6 p.)

T. V; 1870-1871.

BERGSMA (P.-A.). — *Sur la marée lunaire atmosphérique à Batavia.* (10 p.)

Van der Willigen (V.-S.-M.). — *Sur les mesures naturelles.* (36 p.)

Bierens de Haan (D.). — *Contributions à la théorie des intégrales définies.* N^{os} X et XI. (27 p.)

Ces deux articles traitent de la différentiation et de l'intégration d'une intégrale définie double, par rapport à une constante qui entre sous le signe d'intégration.

Van Geer (P.). — *Sur le mouvement d'un corps pesant autour d'un point fixe.* (32 p.)

L'auteur applique les fonctions elliptiques au développement des formules, d'après la méthode de Jacobi.

Stamkart (F.-J.). — *Exposé d'un procédé pour la détermination du poids spécifique d'un fluide dans un espace fermé ou dans un vase de verre.* (6 p.)

Grinwis (C.-H.-C.). — *Contribution à la théorie du potentiel électrodynamique.* (22 p.)

Comparaison des résultats déduits des théories d'Ampère et de Weber, avec ceux auxquels conduit la nouvelle théorie de B. Neumann.

Baehr (G.-F.-W.). — *Sur le mouvement de l'œil.* (38 p., 1 pl.; fr.)

Bosscha (J.) jr. — *Sur la détermination des températures dans les recherches de Regnault sur la tension de la vapeur d'eau.* (12 p.)

T. VI; 1872.

Donders (F.-C.). — *La projection des phénomènes visuels suivant les lignes de distinction.* (53 p.)

Kaiser (F.). — *Rapport sur quelques mesures prises pour l'observation du passage de Vénus sur le disque du Soleil, le 8 décembre 1874.* (19 p.)

Bierens de Haan (D.). — *La méthode d'Euler pour l'intégra-*

---

(1) Voir *Bulletin*, t. V, p. 279.

tion de quelques équations différentielles linéaires, démontrée à l'aide de l'équation intégrante (¹). (18 p.)

GRINWIS (C.-H.-C.). — *Sur l'énergie d'une charge électrique.* (7 p.)

VAN DER WILLIGEN (V.-S.-M.). — *Résultats du calcul relatif à une combinaison de mica, de E. Reusch, pour la lumière polarisée et les rayons parallèles.* (25 p.)

BIERENS DE HAAN (D.). — *Sur les quadratures par approximation.* (14 p.)

L'auteur déduit de la formule de Taylor la formule connue qui donne la valeur d'une intégrale définie au moyen d'une somme et d'une série complémentaire, avec l'expression du reste de cette série.

HARTING (P.). — *Le physomètre, nouvel instrument pour la détermination des volumes variables de l'air et d'autres corps.* (37 p.; 1 pl.)

BAEHR (G.-F.-W.). — *Sur les racines des équations*

$$\int_0^\pi \cos(x\cos\omega)\,d\omega = 0, \text{ et } \int_0^\pi \cos(x\cos\omega)\sin^2\omega\,d\omega = 0.$$

(9 p.; fr.)

OUDEMANS (A.-C.) jr. — *Sur l'influence de milieux liquides optiquement inactifs sur le pouvoir rotatoire spécifique de substances optiquement actives.* (31 p.)

T. VII; 1872.

BAEHR (G.-F.-W.). — *Sur l'équation de continuité du mouvement des fluides.* (3 p.; fr.)

BIERENS DE HAAN (D.). — *Contributions à la théorie des intégrales définies.* Nos XII et XIII. (20 p.)

1° Détermination de quelques intégrales contenant les facteurs e^{qx^p}, $\cos(qx^p)$; 2° sur l'intégrale $\int_a^b \log\Gamma(x)\,dx$.

(¹) Voir *Bulletin*, t. V, p. 283.

Van der Willigen (V.-S.-M.). — *Sur les phénomènes de polarisation chromatique pour quelques cristaux dans la lumière convergente.* (60 p.)

Grinwis (C.-H.-C.). — *Sur la théorie des résonnateurs.* (16 p.)

M. Helmholtz a publié en 1859 [1] un travail théorique sur les tuyaux sonores ouverts, dont l'ouverture est petite par rapport à la surface de la cavité. Ce travail a été suivi, en 1870, d'un Mémoire de M. Strutt [2], dont le but principal est d'étudier l'influence des diverses formes de l'ouverture sur la hauteur du son, afin de pouvoir comparer sous ce rapport les résultats de la théorie avec ceux de l'expérience.

M. Strutt esquisse brièvement une méthode nouvelle pour la détermination de la hauteur du son, qui, dans un cas particulier, le conduit à retrouver les résultats de Helmholtz. Cette méthode repose sur une transformation périodique de la force vive des mouvements sonores en énergie potentielle, et semble devoir rendre d'utiles services dans la théorie du son.

Toutefois M. Grinwis s'est aperçu que le développement de cette méthode conduit à des inexactitudes, et que les raisonnements de l'inventeur laissent à désirer sous le rapport de la simplicité et de la clarté. Il a donc repris cette théorie, en la rattachant à celle de Helmholtz, et y introduisant la rigueur nécessaire. Son objet est de déterminer la hauteur du son d'une cavité sonore, dans le cas d'une ouverture circulaire suffisamment petite. De plus, il traite la question de l'intensité du son, tant absolue que relative, sous la double action de l'intensité de l'ébranlement initial et de l'influence de la forme de la cavité pour renforcer le son.

Van der Willigen (V.-S.-M.). — *Sur l'inadmissibilité de l'hypothèse que la réfraction de la lumière est modifiée par le mouvement de la source lumineuse et du prisme.* (79 p.)

Stieltjes (T.-J.). — *Sur la manière de calculer la charge d'eau dans les polders.* (12 p.)

---

(1) *Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden* (Borchardt's *Journal*, Bd. 57, S. 1-72).

(2) Voir *Bulletin*, t. VI, p. 228.

MONATSBERICHTE DER KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU BERLIN (1).

BORCHARDT (C.-W.). — *Recherches sur l'élasticité des corps solides isotropes soumis à l'action de la chaleur.* (49 p.)

Déterminer les déformations en un point quelconque d'un corps solide isotrope, dont l'équilibre de température est troublé par un échauffement inégal de ses éléments, tel est le problème traité dans le présent Mémoire.

Les équations différentielles de ces déformations ont été données par M. Fr. Neumann et par Duhamel; mais la détermination exacte des déformations n'a été faite jusqu'à présent que pour les cas très-particuliers des corps de forme sphérique ou circulaire, l'accroissement de la température étant une fonction du rayon seulement. En outre, la solution du problème n'a été obtenue sous forme finie que pour le cas des corps de dimensions infinies (2); dans le cas des formes sphériques ou circulaires limitées, elle conduit à des séries doublement (3) ou simplement (4) infinies.

M. Borchardt démontre que, pour les cas des formes sphériques ou circulaires, l'intégration des équations différentielles peut être effectuée sous forme finie.

N'ayant égard qu'aux seules forces élastiques et considérant le potentiel extérieur (qui satisfait à l'équation différentielle de Laplace) et le potentiel intérieur (qui satisfait à l'équation différentielle de Poisson), l'intégration se fait uniquement à l'aide de ces potentiels qui forment les fonctions arbitraires de la solution. La considération de la chaleur conduit à un troisième potentiel intérieur, qui peut être déterminé par la considération des conditions aux limites, en s'appuyant sur le principe connu, que dans l'intérieur d'un espace continu une fonction potentielle uniforme et finie, qui s'évanouit pour les limites de cet espace, est identiquement nulle.

---

(1) Voir *Bulletin*, t. VI. p. 40.

(2) W. THOMSON, *Cambridge and Dublin Math. Journal*, p. 87, 1878. — THOMSON and TAIT, *Natural Philosophy*, t. II, p. 570.

(3) LAMÉ, *Journal de Liouville*, 1854, et *Leçons sur les coordonnées curvilignes*.

(4) W. THOMSON, *Philosophical Transactions*, vol. CLIII, 1863.

Ce troisième potentiel est ensuite éliminé par des transformations particulières.

Les formules qui donnent les expressions des déformations R, φ, ψ d'un élément, estimées dans le sens de coordonnées polaires ρ, ϑ, η de cet élément, sont :

1° Pour le cas d'un disque circulaire d'épaisseur infiniment petite et de rayon égal à l'unité,

$$\begin{aligned} &2(1+2\theta)\,e^{\rho}\left(\mathrm{R}+\varphi\sqrt{-1}\right)\\ &\quad=\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \rho}+\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \vartheta}\sqrt{-1}-(1-e^{2\rho})\left[\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial \rho}+\frac{\partial^2 \mathfrak{P}}{\partial \rho^2}+\left(\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial \vartheta}+\frac{\partial^2 \mathfrak{P}}{d\rho\, d\vartheta}\right)\sqrt{-1}\right]\\ &\quad\quad-\frac{3+5\theta}{1+3\theta}e^{2\rho}\left(\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial \rho}-\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial \vartheta}\sqrt{-1}\right)-\mathfrak{g}c-\frac{1+\theta}{1+3\theta}\mathfrak{g}ce^{2\rho}. \end{aligned}$$

2° Pour le cas d'une sphère de rayon 1,

$$e^{\rho}\mathrm{R}=e^{2\rho}\mathrm{X}+\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial r},\quad e^{\rho}\varphi=\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial \vartheta},\quad e^{\rho}\sin\vartheta.\psi=\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial \eta},$$

P, $\mathfrak{P}$, X, N, $\mathfrak{g}$, c étant des fonctions déterminées des coordonnées de la température et de la constante d'élasticité.

Pour vérifier l'exactitude de ces formules, M. Borchardt les applique au cas où la température n'est qu'une fonction du rayon seulement et retrouve les résultats obtenus par Neumann [1] et par Duhamel [2].

Helmholtz (H.). — *Parallèle entre les lois des forces électrodynamiques d'Ampère et de Neumann.* (17 p.)

Kronecker (L.). — *Sur les séries de Sturm et leurs relations mutuelles.* (38 p.)

Auwers. — *Sur une prétendue variation du diamètre solaire.* (59 p.)

L'idée de la variation du diamètre solaire, émise par Lindenau en 1808, a été récemment reprise par le P. Secchi, qui, d'après les observations faites à l'Observatoire de Rome pendant une partie

---

(1) *Abhandlungen der Berliner Akademie aus dem Jahre* 1841.

(2) *Mémoire présenté à l'Académie de Paris*, 1838.

des années 1871 et 1872, a conclu que cette variation est réelle et dépendante de l'intensité des protubérances et des taches [1]. Le maximum du diamètre solaire, $32' 3'', 74$, a été observé entre zéro et $+ 6$ degrés de latitude héliographique et le minimum $32' 2'', 18$ entre ± 21 degrés et ± 23 degrés de même latitude.

Le maximum du diamètre correspondrait au minimum d'intensité des protubérances.

Après une discussion approfondie des résultats d'observations du diamètre solaire faites pendant le même temps que les observations de Rome (de juillet 1871 à juillet 1872) aux Observatoires de Greenwich, de Neuchâtel, d'Oxford, de Washington, de Paris, de Königsberg et de Bruxelles, M. Auwers conclut que les déductions faites par le P. Secchi sont peu rigoureuses, ou au moins prématurées.

Auwers. — *Supplément aux recherches sur la variation du mouvement propre de Procyon.* (48 p.)

A l'occasion de la découverte faite par M. Struve, le 19 mars 1873, d'un point lumineux situé à proximité de Procyon, et dont la position semble coïncider avec celle d'un compagnon de cet astre, théoriquement supposé par Bessel, M. Auwers reprend le calcul des éléments de l'orbite de Procyon [2].

Helmholtz (H.). — *Un théorème relatif au mouvement géométriquement semblable des fluides avec application au problème de la direction des ballons.* (14 p.)

Borchardt (C.-W.). — *Sur les déformations des corps élastiques isotropes sous l'action des forces mécaniques appliquées à leur surface.* (19 p.)

Par une méthode analogue à celle qu'il a employée dans son précédent Mémoire [3], l'auteur donne les expressions finies des déformations éprouvées par les éléments d'un disque circulaire, soumis à l'action des forces mécaniques appliquées à son bord, et d'une sphère soumise à l'action des forces appliquées à sa surface.

---

(1) *Memorie della Società degli Spettroscopisti Italiani*, novembre 1872.

(2) Une première détermination de ces éléments a été faite par l'auteur en 1861, dans son Ouvrage intitulé : *Untersuchungen über veränderliche Eigenbewegungen.*

(3) *Voir* plus haut, p. 130.

Ces déformations $(\mathrm{R}, \varphi, \psi)$, dirigées dans le sens des coordonnées polaires ρ, ϑ, η croissantes, sont données par les formules suivantes :

1° Pour le cas d'un disque circulaire, de rayon égal à l'unité, dont le bord est sollicité par des forces dont les composantes prises dans le sens de déformation sont $2\mathrm{KP}(\vartheta)$, $2\mathrm{K}\Phi(\vartheta)$, K étant la constante d'élasticité,

$$
\begin{aligned}
&2\pi e^{\rho}\left(\mathrm{R}+\varphi\sqrt{-1}\right)\\
&\quad=\frac{1+\theta}{1+3\theta}\int_0^{2\pi} d\vartheta_1 \mathrm{P}_1-\int_0^{2\pi} d\vartheta_1\left(\mathrm{P}_1-\sqrt{-1}\,\Phi_1\right)e^{\rho-(\vartheta-\vartheta_1)\sqrt{-1}}\log\left(1-e^{\rho-\sqrt{-1}(\vartheta-\vartheta_1)\sqrt{-1}}\right)\\
&\quad-\frac{3+5\theta}{1+3\theta}e^{2\rho}\int_0^{2\pi} d\vartheta_1\left(\mathrm{P}_1+\sqrt{-1}\,\Phi_1\right)\left[e^{-\rho-(\vartheta-\vartheta_1)\sqrt{-1}}\log\left(1-e^{\rho+(\vartheta-\vartheta_1)\sqrt{-1}}\right)+1\right]\\
&\quad+\left(1-e^{2\rho}\right)\int_0^{2\pi} d\vartheta_1\left(\mathrm{P}_1-\sqrt{-1}\,\Phi_1\right)\frac{e^{\rho-(\vartheta-\vartheta_1)\sqrt{-1}}}{1-e^{\rho-(\vartheta-\vartheta_1)\sqrt{-1}}}.
\end{aligned}
$$

2° Pour le cas d'une sphère de rayon $=1$, dont la surface est soumise à l'action de forces dont les composantes prises dans le sens des déformations sont $2\mathrm{KP}$, $2\mathrm{K}\Phi$, $2\mathrm{K}\Psi$,

$$
\begin{aligned}
e^{\rho}\mathrm{R} &= e^{2\rho}\mathrm{X}+\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial \rho},\\
e^{\rho}\varphi &= -\frac{e^{\rho}}{\sin\vartheta}\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial \eta}+\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial \vartheta},\\
e^{\rho}\varphi &= e^{\rho}\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial \vartheta}+\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial \eta},
\end{aligned}
$$

dans lesquelles X, Y, N sont des fonctions déterminées des coordonnées et des forces extérieures.

Sohncke (L.). — *Les systèmes plans réguliers de points d'une extension illimitée.* (6 p.)

Extrait lu par M. Borchardt d'un travail de M. Sohncke, relatif au problème d'un arrangement de points, tel que la distribution des points situés autour d'un point du système considéré comme centre soit identique, quel que soit le point considéré. (Problème du groupement des molécules dans les cristaux).

Helmholtz (H.). — *Sur les limites de l'effet utile des microscopes.* (1 p.)

Riess. — *Sur le jeu des machines à électrophore et sur la double influence.* (10 p.) A. P.

ATTI dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei. In-4° (¹).

T. XXVI; 1872-1873.

Secchi (le P.). — *Les étoiles filantes du 27 novembre 1872.* (13 p.)

Secchi (le P.). — *Taches solaires.* (7 p.)

Azzarelli (M.). — *Formules générales pour déterminer les côtés des triangles rectangles primitifs.* (11 p.)

On appelle ainsi les triangles rectangles dont les côtés sont donnés par des nombres entiers n'admettant pas de facteur commun.

Mainardi (G.). — *Réflexions sur divers sujets* (suite). (14 p.)

Le savant professeur réclame, avec preuves à l'appui, la priorité de plusieurs propositions, publiées par lui depuis longtemps, et que d'autres auteurs ont, depuis, retrouvées de leur côté, sans avoir eu connaissance de ses travaux. Ses observations portent sur les articles suivants :

Recherches relatives à la théorie des surfaces, par lesquelles il a complété le célèbre travail de Gauss, et dont les résultats ont été reproduits par Bour en 1862.

Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre. M. Darboux a publié, dans le t. VII des *Annales de l'École Normale,* un Mémoire sur ce sujet, que M. Mainardi aurait traité quatorze ans auparavant, en partant de la même remarque fondamentale.

Polygones et polyèdres. En 1832, M. Mainardi a démontré que le carré de l'aire d'un polygone et le carré du volume d'un polyèdre sont des fonctions entières des droites qui joignent les sommets ;

(¹) Voir *Bulletin*, t. V, p. 15.

que le cosinus de l'angle des plans de deux triangles est une fonction des distances mutuelles des sommets, etc.; propositions qui ont été attribuées à des auteurs de publications plus récentes.

Lieu géométrique relatif à l'addition des intégrales elliptiques de seconde espèce. Propriété analogue à celle que M. Hermite a exposée pour les intégrales de première espèce ([1]).

Théorème de Géométrie. (Volume d'un cylindre tronqué).

Relations entre six points d'une conique, etc.

Sur les points racines des équations algébriques complexes.

Théorème sur le triangle et le tétraèdre, comprenant ceux de Pythagore et de de Gua.

Polygones maxima inscrits et polygones minima circonscrits à l'ellipse, et polyèdres analogues pour l'ellipsoïde. (*Annali di Sc. mat. e fis.*, t. I, 1850, p. 348.)

Sur la théorie générale des courbes. M. Mainardi a donné, en 1827 (*Mem. della Soc. Ital. delle Sc.*), plusieurs résultats, obtenus seize ans plus tard par M. de Saint-Venant. (*Journ. de l'Éc. Pol.*, XXXe cah.)

Sur les courbes planes. Théorie des développées imparfaites, etc.

Secchi (le P.). — *Sur la distribution des protubérances autour du disque solaire, et sur leur relation avec les taches.* 8e, 9e et 10e Communication. (25-11-34 p.)

Provenzali (le P.). — *Sur quelques variations lentes de l'intensité magnétique.* (9 p.)

Provenzali (le P.). — *Sur la théorie des isolateurs armés.* 2 articles. (10-7 p.)

Azzarelli (M.). — *Résolution de quelques problèmes géométriques proposés par Kramp* (suite). (53 p.) ([2]).

Provenzali (le P.). — *Sur l'intensité de la lumière solaire.* 3e article. (6 p.)

Azzarelli (M.). — *Solution de quelques problèmes d'Hydrostatique.* (30 p., 1 pl.)

Voici quelques-unes des questions traitées dans ce Mémoire :

Étant donnée la ligne d'intrados d'un pont et la hauteur du ni-

---

([1]) Voir *Bulletin*, t. II, p. 21.

([2]) Voir *Bulletin*, t. V, p. 16.

veau d'une masse fluide au-dessus des impostes, calculer la pression exercée contre la voûte cylindrique du pont. — Application aux cas où la ligne d'intrados est un demi-cercle, une demi-ellipse, une cycloïde; où les impostes ne sont pas sur une même horizontale; où la voûte est conique, etc.

De la stabilité de l'équilibre d'un cylindre homogène, dont l'axe, mobile dans un plan autour d'un point fixe, est en partie immergé dans un fluide homogène pesant; des lois de son mouvement dans l'hypothèse où il oscille autour du point fixe.

Mainardi (G.). — *Réflexions sur divers sujets* (suite). (14 p.)

Sur les surfaces géométriques; extension aux surfaces d'un théorème sur les courbes découvertes par Maclaurin.

Analogie entre les équations algébriques et les équations différentielles linéaires. M. Mainardi réclame comme sienne l'expression simple des coefficients d'une équation différentielle linéaire au moyen des intégrales particulières, expression qu'il a donnée en 1850 dans les *Annales de Tortolini*.

Une intégrale de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants.

Sur l'équation fondamentale de la Balistique.

Relations entre les racines d'une forme binaire cubique et celles de ses premiers covariants.

Arithmétique élémentaire; à propos d'un article de M. Bourget « sur la racine carrée des nombres approchés » [1].

Trigonométrie : démonstration de la formule qui donne $\sin(a+b)$. Formule de Trigonométrie sphérique.

Denza (le P.). — *Sur la dépendance possible entre les éclipses de Soleil et le magnétisme terrestre.* (29 p., 4 pl.)

Bertelli (le P.). — *Sur l'aurore boréale du 4 février* 1872. (29 p.)

Denza (le P.). — *Observations de la déclinaison magnétique faites à Aoste, Moncalieri et Florence à l'occasion de l'éclipse de Soleil du* 23 *mai* 1873. (22 p., 2 pl.)

---

[1] *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1870. Voir *Bulletin*, t. II, p. 81.

SITZUNGSBERICHTE der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien. Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe ([1]).

T. LX (fin); octobre-décembre 1869.

Haidinger (W. von). — *Remarques sur l'arc-en-ciel.* (18 p.)

Oppolzer (Th. v.). — *Détermination définitive de l'orbite de la planète* (64) « *Angelina* ». (66 p.)

L'auteur calcule les éléments de l'orbite au moyen des observations faites pendant quatre apparitions. Il en conclut les éphémérides des apparitions de 1870 et 1871, et termine son Mémoire par une Table des perturbations spéciales produites par Jupiter et Saturne, du 9 mars 1861 au 20 janvier 1874.

Ditscheiner (L.). — *Sur la différence de marche et le rapport d'intensité des rayons polarisés renvoyés parallèlement et perpendiculairement au plan d'incidence dans la réflexion sur des réseaux de verre.* (19 p.)

Unferdinger (Fr.). — *Sur le paradoxe de Dirichlet, concernant les séries infinies.* (14 p.)

Il s'agit du changement qu'éprouve, par suite du changement d'ordre des termes, la somme d'une série dont la convergence n'est pas indépendante des signes des termes. L'auteur donne une expression de la variation de cette somme pour la série

$$\frac{1}{z+1}+\ldots+\frac{1}{z+m}-\frac{1}{z+m+1}-\ldots-\frac{1}{z+m+n}+\frac{1}{z+m+n+1}$$
$$+\ldots+\frac{1}{z+2m+n}-\ldots,$$

lorsqu'on y intervertit l'ordre des termes, de manière que la série présente alternativement mm' termes positifs et nn' termes négatifs.

Unferdinger (Fr.).—*Valeurs des dérivées d'ordre quelconque des fonctions* $e^{ax}\cos(\alpha+\beta x)$, $e^{ax}\sin(\alpha+\beta x)$, $x^a\cos[b\log(\alpha+\beta x)]$, $x^a\sin[b\log(\alpha+\beta x)]$, ... (26 p.)

([1]) Voir *Bulletin*, t. I, p. 208.

Dans une Note qui termine ce Mémoire, l'auteur donne une nouvelle démonstration de l'expression de Waring, pour les sommes de puissances des racines d'une équation algébrique.

Unferdinger (Fr.). — *Cubature des segments et des couches dans les surfaces du second ordre.* (37 p.)

L'auteur calcule, pour les diverses espèces de surfaces du second degré, des volumes compris entre des plans non perpendiculaires aux axes principaux.

Lang (V. von). — *Sur la vitesse de la lumière dans le quartz.* (28 p.)

Ditscheiner (L.). — *Sur la dispersion des axes optiques dans les cristaux rhomboédriques.* (10 p.)

Winckler (A.). — *Sur quelques formules et méthodes relatives à la théorie des intégrales définies.* (61 p.)

L'auteur établit d'abord, d'une manière élémentaire, des relations au moyen desquelles on peut trouver facilement les valeurs d'un grand nombre d'intégrales définies. Il démontre ensuite rigoureusement cette proposition connue, utile dans beaucoup de cas, que l'intégrale définie du produit $\varphi(x)\,\chi(x)$ d'une fonction quelconque $\varphi(x)$ par une fonction $\chi(x)$ variant toujours dans le même sens entre les limites d'intégration peut se ramener à l'intégrale de $\varphi(x)$, prise à partir d'une moyenne, encore inconnue, entre les deux limites de l'intégration. Cette moyenne peut se déterminer exactement dans certaines hypothèses. Enfin, à l'aide du théorème sur l'interversion de l'ordre des intégrations dans une intégrale double à limites constantes, et en faisant usage du *facteur de discontinuité,* ainsi que d'une formule qui donne le reste des n premiers termes de la série de Maclaurin, sous forme d'une intégrale n-uple, on obtient les valeurs de plusieurs quadratures en partie discontinues.

Oppolzer (Th. v.). — *Sur la détermination de l'orbite d'une comète.* 2e Mémoire. (27 p.)

Dans un Mémoire sur le même sujet, publié en 1868 [1], l'auteur avait donné une solution du problème de la détermination d'une

[1] *Sitzungsberichte*, Bd. LVII.

orbite parabolique au moyen de trois observations, dans laquelle il s'était attaché surtout à rendre minimum l'influence des erreurs d'observation sur la détermination des éléments. Cette méthode présentait l'avantage de n'être pas sujette au cas d'exception connu, qui rend souvent impraticable l'application de la méthode d'Olbers. Seulement les calculs exigés par la nouvelle méthode étaient beaucoup plus longs que ceux qu'entraîne la méthode d'Olbers, à l'exception, toutefois, des cas défavorables de celle-ci. Depuis, M. von Oppolzer est parvenu à réduire d'une façon notable le travail du calcul de ses formules, de sorte que leur emploi devient avantageux dans les cas à moitié défavorables du procédé d'Olbers. Le Mémoire commence par la recherche des limites entre lesquelles la méthode d'Olbers est applicable.

T. LXI, fasc. 1; janvier 1870.

Waszmuth (A.). — *Sur un nouveau procédé pour déterminer le coefficient de réduction d'une boussole des tangentes.* (7 p.)

Hann (J.). — *La diminution de chaleur pour une altitude croissante, à la surface de la Terre, et sa période annuelle.* (17 p.)

Weyr (Em.). — *Sur les faisceaux de courbes.* (7 p.)

Neumann (Cl.). — *Observations sur les vibrations des cordes sous l'action de l'archet.* (16 p., 12 pl.)

« Duhamel (1) a, le premier, essayé de fonder une théorie du mouvement des cordes sous l'influence de l'archet, en croyant pouvoir réduire cette influence à une résistance de frottement. Cette théorie ne peut être admise comme exacte, surtout quand on considère les résultats étranges auxquels Duhamel est arrivé, et parmi lesquels on peut citer celui-ci, qu'un frottement prolongé doit, selon lui, amener la corde au repos, ce qui serait une conséquence naturelle de l'hypothèse du frottement.

» Plus récemment, Helmholtz (2) a étudié de nouveau le mouvement des cordes soumises à l'action de l'archet. Il s'est moins préoccupé toutefois de fonder une théorie que de déterminer expé-

---

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. IX; 1839.

(2) *Lehre von den Tonenempfindungen.* Braunschweig, p. 137; 1863.

rimentalement le mouvement réel de la corde. Les observations faites par ce physicien ne suffisent pas, à elles seules, pour faire connaître le mouvement des cordes. Ce mouvement se déduit d'un très-petit nombre d'observations, à l'aide d'une théorie partant de l'hypothèse idéale d'une corde infiniment mince et parfaitement flexible. Beaucoup de points, d'ailleurs, ont été signalés par Helmholtz comme problématiques.

» Il est permis, dans ces circonstances, de ne pas regarder les recherches, tant expérimentales que théoriques, comme terminées. Le but du présent travail est d'abord de déterminer complétement, par la voie de l'observation, le mouvement des cordes. Les résultats obtenus sont le plus souvent en accord très-suffisant avec les propositions de Helmholtz. Les écarts se rencontrent là où l'on devait les attendre, lorsqu'on abandonne les hypothèses idéales. Un grand nombre des questions regardées comme problématiques par Helmholtz ont pu être décidées avec une certitude complète. »

Unferdinger (Fr.). — *Transformation et détermination de l'intégrale triple* $\int\int\int F\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}, \alpha x+\beta y+\gamma z\right) dx\,dy\,dz$. (15 p.)

Si l'on pose

$$\rho^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2, \quad \alpha x+\beta y+\gamma z=\rho p, \quad x^2+y^2+z^2=p^2+r^2,$$
$$\operatorname{tang}\theta=\frac{\beta(\alpha y-\beta x)+\gamma(\alpha z-\gamma x)}{\rho(\gamma y-\beta z)},$$

l'intégrale proposée prend la forme

$$\int\int\int F(p^2+r^2, \rho p)\, dp\, r\, dr\, d\theta.$$

Application à diverses cubatures.

MÉLANGES.

NOTE SUR UN THÉORÈME DE M. G. BRUNO (1).

On donne dans l'espace deux formes projectives : une ponctuelle A_1, A_2, A_3,... sur une droite a, et un faisceau de droites b_1, b_2, b_3,..., de centre B dans un plan β. D'un point quelconque A_n, de a on abaisse une perpendiculaire $A_n B_n$ sur le rayon correspondant b_n; le lieu géométrique Σ de toutes les perpendiculaires $A_n B_n$ est une surface du quatrième ordre dont la trace sur le plan β se compose d'une droite et d'une courbe du troisième ordre.

La perpendiculaire $A_n B_n$ est l'intersection du plan perpendiculaire à b_n mené par A_n, et du plan déterminé par le rayon b_n et la droite BA_n. Le premier de ces plans enveloppe un cylindre parabolique dont les génératrices sont perpendiculaires au plan β ; le plan b_n, BA_n enveloppe un cône du second degré, dont le sommet est B. La surface Σ est donc aussi le lieu des intersections des plans tangents correspondant au cylindre parabolique et au cône du second ordre. L'application du principe de correspondance à la recherche du nombre des points où Σ coupe une droite quelconque montre que cette surface est du quatrième ordre.

Si nous nommons b le rayon du faisceau B qui correspond au point $a\beta$, la perpendiculaire abaissée du point $a\beta$ sur b appartient tout entière à la trace de Σ sur β : cette trace se décompose donc en une courbe du troisième ordre et une droite.

Supposons que le rayon b_p du faisceau B qui est perpendiculaire au plan qui projette a sur β corresponde au point à l'infini de a. Toutes les parallèles à a, qui s'appuient sur b_p, sont perpendiculaires à cette droite et passent au point à l'infini de a ; elles forment un plan qui appartient tout entier à Σ. Cette surface se décompose donc en un plan et une surface du troisième ordre, dont la trace sur β se compose d'une droite et d'une conique.

Si nous supposons que le rayon du faisceau B, qui correspond au point $a\beta$ de a, soit le rayon B, $a\beta$, le plan perpendiculaire à la droite B, $a\beta$ au point $a\beta$ appartient tout entier à la surface Σ, qui se décompose en un plan et une surface du troisième ordre.

---

(1) Voir *Bulletin*, t. V, p. 272.

Si le rayon B, $a\beta$ correspond au point $a\beta$ et si, en même temps, le rayon b_p, perpendiculaire au plan qui projette a sur β, correspond au point à l'infini de a, la surface Σ se décompose en un système de deux plans et une surface du second ordre. Mais alors les plans menés par A_n, perpendiculairement aux rayons correspondants b_n, se coupent tous suivant une droite c perpendiculaire à β, et le lieu des points B_m est un cercle décrit sur ($c\beta$, B) comme diamètre. La surface Σ peut être considérée comme engendrée par une droite s'appuyant sur le cercle $c\beta$, B et sur les directrices rectilignes a et c qui s'appuient toutes les deux sur le cercle, et dont l'une est perpendiculaire à son plan ; la surface du second ordre est donc un hyperboloïde gauche, dont les sections parallèles à β sont circulaires.

Supposons maintenant que le centre B du faisceau coïncide avec le point $a\beta$, le rayon b qui correspond à $a\beta$ passe toujours par ce point et la surface Σ se décompose en une surface du troisième ordre et un plan. Ce résultat peut s'énoncer ainsi, en admettant que le plan β soit horizontal, ce qui n'enlève rien à la généralité de la question : si des différents points d'une génératrice a d'une surface gauche, on mène les lignes de plus grande pente des plans tangents correspondants, le lieu géométrique de ces droites se compose d'un plan et d'une surface du troisième ordre.

Supposons que le centre B du faisceau b coïncide avec $a\beta$ et qu'en même temps le rayon b_p perpendiculaire au plan projetant de a sur β corresponde au point à l'infini de a, le lieu Σ se décompose en un système de deux plans et un hyperboloïde réglé. Si a est une génératrice d'une surface gauche, le plan ab_p est le plan tangent à la surface gauche au point à l'infini de a et, par suite de notre hypothèse, le plan central de a est perpendiculaire au plan β, c'est-à-dire vertical, et nous trouvons ainsi que : si des différents points d'une génératrice a d'une surface gauche, dont le plan austral est vertical, on mène les lignes de plus grande pente des plans tangents correspondants, le lieu géométrique de ces droites se compose d'un système de deux plans et d'un hyperboloïde gauche, dont les sections horizontales et les sections perpendiculaires à a sont circulaires.

Ed. Dewulf,
Commandant du Génie.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

André (C.) et Rayet (G.). — L'Astronomie pratique et les Observatoires en Europe et en Amérique, depuis le milieu du XVIIe siècle jusqu'à nos jours. 2e Partie : Écosse, Irlande et colonies anglaises. — Paris, Gauthier-Villars, 1874. 1 vol. in-18, 176 p. 4 fr. 50.

Bertin (L.-E.), ingénieur de la Marine. — Étude sur la ventilation d'un transport-écurie. — Paris, Gauthier-Villars. In-4°, 56 p., 2 pl. 3 fr.

— Note sur la résistance des carènes dans le roulis des navires et sur les qualités nautiques. — Paris, Gauthier-Villars. In-4°, 52 p., 5 pl. 3 fr. 50.

— Données théoriques et expérimentales sur les vagues et le roulis. — Paris (Cherbourg), Gauthier-Villars, 1874. 1 vol. grand in-8°, 276 p., 1 pl. 6 fr.

Contamin (V.). — Cours de résistance appliquée, professé à l'École Centrale des Arts et Manufactures, 1873-1874. Lithographié. — Paris, Gauthier-Villars, in-4°, 315 p. 12 fr.

Estocquois (Th. d'). — Recherches d'Hydrodynamique. — Paris (Dijon). Gauthier-Villars, 1874. In-8°, 26 p. 1 fr. 50.

Garbieri (G.). — I Determinanti, con numerose applicazioni. *Parte* I^a. — Bologna, Zanichelli, 1874. Grand in-8°, 267 p.

Levy (Maurice), ingénieur des Ponts et Chaussées, docteur ès sciences. — La Statique graphique et ses applications aux constructions. — Paris, Gauthier-Villars, 1874. 2 vol. grand in-8°, dont 1 de planches. 16 fr. 50.

Perrot de Chaumeux (L.). — Premières Leçons de Photographie, 2e édition. — Paris, Gauthier-Villars, 1874. In-18, 72 p., 1 fr. 50.

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

ARGAND (R.). — ESSAI SUR UNE MANIÈRE DE REPRÉSENTER LES QUANTITÉS IMAGINAIRES DANS LES CONSTRUCTIONS GÉOMÉTRIQUES. 2e édition, précédée d'une Préface par M. J. HOÜEL, et suivie d'un Appendice contenant des Extraits des *Annales de Gergonne*, relatif à la question des imaginaires. — Paris, Gauthier-Villars, libraire-éditeur; 1874. Prix : 5 francs.

L'Ouvrage que nous rééditons aujourd'hui est du petit nombre de ceux qui marquent une époque dans l'histoire de la science. C'est dans cet Opuscule que l'on trouve le premier germe de la vraie théorie des quantités dites *imaginaires*. Cette théorie, dont on fait généralement honneur au génie de Gauss, n'a été indiquée par ce grand géomètre que vingt-cinq ans après l'impression du travail d'Argand ([1]), et, dans l'intervalle, elle avait été plusieurs fois réinventée, tant en France qu'en Angleterre. Nous ne pouvons invoquer, à ce sujet, de témoignage plus probant que celui d'un géomètre allemand, dont la science déplore la perte récente.

« Le premier, dit M. Hankel ([2]), qui ait enseigné la représentation des nombres imaginaires $A + Bi$ au moyen des points d'un plan et qui ait donné les règles de l'addition et de la multiplication géométrique de ces nombres, c'est Argand, qui établit sa théorie dans une brochure imprimée à Paris, en 1806, sous le titre de : *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*. Toutefois cet écrit ne parvint à la connaissance du public qu'à la suite d'une Note insérée par J.-F. Français dans les *Annales de Gergonne*, tome IV, 1813-1814, page 61, et à l'occasion de laquelle Argand fit paraître deux articles dans le même Recueil ([3]). Dans ces articles, la théorie est traitée d'une manière si complète, que l'on n'a trouvé, depuis, rien de nouveau à y ajouter; et, à moins que l'on ne vienne à découvrir quelque autre travail plus ancien, c'est Argand que l'on doit re-

---

([1]) *Anzeige zur « Theoria residuorum biquadraticorum, Commentatio secunda ».* 1831. (GAUSS, *Werke*, t. II, p. 174.)

([2]) *Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihre Functionen.* (Leipzig, 1867, p. 82.)

([3]) T. IV, p. 133, et t. V, p. 197.

garder comme le véritable fondateur de la théorie des quantités complexes dans le plan.

» . . . On sait que Gauss, en 1831 (¹), a développé la même idée; mais, quelque grand que soit son mérite comme introducteur de cette idée dans la science, il n'en est pas moins impossible de lui en attribuer la priorité. »

Comme on le voit par ce résumé fidèle de l'historique de cette question, l'Ouvrage d'Argand était resté à peu près complétement ignoré, n'ayant pas été mis dans le commerce (²), et n'ayant été distribué qu'à un petit nombre de personnes. Sept ans plus tard, Français, officier d'artillerie à Metz, envoya au rédacteur des *Annales* (³) un aperçu d'une théorie dont il avait trouvé l'idée première dans une lettre adressée à son frère par Legendre, qui la tenait lui-même d'un autre auteur dont il ne donnait pas le nom. Cet article tomba sous les yeux d'Argand, qui adressa aussitôt à Gergonne une Note (⁴) par laquelle il se faisait connaître comme l'auteur du travail cité dans la lettre de Legendre, et où il donnait en même temps un résumé assez complet de sa brochure de 1806.

Cette double publication donna lieu dans les *Annales* à une discussion à laquelle prirent part Français, Gergonne et Servois, et qui se termina par un remarquable article, dans lequel Argand expose d'une manière plus satisfaisante divers points de sa théorie, notamment sa démonstration de la proposition fondamentale de la théorie des équations algébriques, démonstration la plus simple que l'on ait donnée jusqu'ici, et que Cauchy n'a fait que reproduire plus tard sous une forme purement analytique, mais moins saisissante. Ces divers articles formant un complément naturel de la brochure d'Argand, et se trouvant dans un Recueil devenu extrêmement rare, nous les avons réunis dans un *Appendice* à la fin du volume.

Malgré la publicité que l'insertion dans un journal scientifique aussi répandu aurait dû leur procurer, les idées d'Argand passèrent tout à fait inaperçues, et la preuve en est que, vingt-deux ans

(¹) *OEuvres*, t. II, p. 174.
(²) Voir *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires*, etc., p. 77.
(³) *Voir* p. 63.
(⁴) *Voir* p. 76.

après l'impression de l'*Essai*, quatorze ans après celle des articles des *Annales*, elles furent réinventées à la fois, par Warren, en Angleterre, et par Mourey, en France, sans qu'aucun de ces deux auteurs semble avoir eu connaissance des travaux du premier inventeur. Ils ne parvinrent pas eux-mêmes à fixer l'attention des géomètres, bien que les recherches de Mourey eussent été résumées dans les *Leçons d'Algèbre* de Lefébure de Fourcy, et que Warren eût publié dans les *Philosophical Transactions* deux articles faisant suite à son premier Ouvrage. C'est seulement après que Gauss eut parlé que l'on commença, en Allemagne, à prendre ces idées en considération. Elles devinrent bientôt familières aux géomètres anglais, et furent le point de départ de la théorie des quaternions d'Hamilton, tandis que, en Italie, M. Bellavitis les retrouvait de son côté, et fondait sur leur développement sa méthode des équipollences. En France, on continua à refaire le travail d'Argand, sans y rien ajouter d'essentiel, jusqu'au jour où Cauchy adopta cette théorie, et l'exposa dans ses *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique* (¹), avec des indications historiques complètes, et en rendant pleine justice au mérite d'Argand.

Le livre du modeste savant genevois contient le germe de plusieurs suites de recherches, dont les unes ont éclairé d'un jour inattendu les mystères qui régnaient depuis si longtemps sur la véritable nature des quantités négatives et des quantités imaginaires, et ont introduit une grande lumière dans la théorie des fonctions, en la rendant susceptible d'une représentation sensible aux yeux; les autres, moins importantes jusqu'ici, mais auxquelles l'avenir réserve peut-être un grand rôle, ont eu pour résultat la création de nouvelles méthodes de Géométrie analytique, parmi lesquelles il suffira de citer celles de Möbius, de Bellavitis, de Hamilton, de Grassmann.

Longtemps les analystes, dans l'impossibilité d'écarter la présence continuelle des quantités négatives ou imaginaires dans les résultats du calcul, et de se passer des services essentiels que l'usage de ces symboles pouvait leur rendre, se résignèrent à les employer, sans se rendre un compte exact de leur nature, en les considérant

---

(¹) T. IV, p. 157.

comme des signes d'opérations qui n'avaient aucun sens par eux-mêmes, mais qui, soumis à certaines règles, conduisaient par une voie courte et sûre, mais obscure et mystérieuse, aux résultats que l'on n'aurait pu atteindre, par le seul emploi des quantités proprement dites, sans se condamner à de longs et pénibles détours, et sans multiplier à l'infini le nombre des cas particuliers à discuter.

On finit par s'apercevoir [1] que l'impossibilité des quantités négatives n'est qu'apparente, en général, et qu'elle tient à ce que l'on a voulu introduire une généralisation de l'idée de quantité, sans modifier en même temps les définitions des opérations analytiques qui s'y rapportent.

On aurait pu, en remontant aux éléments de l'Arithmétique, rencontrer un cas tout à fait analogue, où personne n'a pourtant songé à trouver de difficultés. L'opération de la division ne peut, le plus souvent, s'effectuer exactement, tant que l'on n'a que des nombres entiers à sa disposition. Si l'on introduit le partage de l'unité en fractions égales, la division devient possible dans tous les cas, et le résultat se présente sous la forme d'une expression *complexe*, contenant deux nombres, dont l'un indique une multiplication, l'autre une division. De là naît une nouvelle classe de quantités, les fractions, sur lesquelles on effectue des opérations portant les mêmes noms que les opérations relatives aux nombres entiers et qu'elles comprennent comme cas particuliers. Mais on a toujours eu soin de modifier en conséquence les définitions de la multiplication et de la division, pour les rendre applicables aux nouvelles quantités.

C'est en agissant d'une manière analogue pour l'addition et la soustraction que l'on peut se faire une idée nette des quantités négatives. Tant qu'il n'est question que de la détermination d'une *grandeur*, la soustraction $a - b$ devient impossible et absurde, si b est plus grand que a. Mais si, au lieu d'une série de grandeurs, croissant dans un sens unique et déterminé à partir de zéro, on est en présence d'une série d'objets, se continuant indéfiniment dans deux sens opposés, et si l'on appelle *addition* l'opération qui consiste à marcher d'une certaine quantité dans un sens convenu,

---

(1) Voir *Essai*, etc., p. 4.

soustraction l'opération inverse qui consiste à marcher dans le sens opposé, les opérations ainsi définies seront toujours exécutables, et leurs résultats seront aussi réels que ceux de l'addition arithmétique.

Pour représenter simplement ces résultats, on est conduit à incorporer, dans le symbole qui désigne une quantité, le signe indiquant dans quel sens cette quantité doit être portée. Telle est la vraie signification des quantités négatives.

On peut encore pousser plus loin cette extension de l'idée de la quantité et des définitions des opérations relatives à cette quantité. Mais, pour la clarté de l'exposition, il devient ici presque indispensable d'employer pour la représentation des objets la notation géométrique, la plus complète et la plus lumineuse de toutes, dans les limites où elle est applicable. Supposons que les objets à déterminer soient soumis à une double cause de variation, et dépendent de deux grandeurs pouvant être représentées par les deux coordonnées de nature quelconque qui fixent chaque point d'un plan. L'opération de l'extraction de la racine carrée, par exemple, définie précédemment dans le cas où une seule coordonnée varie, n'était possible que dans le cas où la quantité soumise à cette opération appartenait à la même région que la quantité qui représente l'unité positive. Tant que $\sqrt{a}$ a dû correspondre à la construction d'une moyenne proportionnelle entre a et $+1$, $\sqrt{-b^2}$ n'a pu être que l'indication d'une opération inexécutable, et aucun point du lieu correspondant à la variation d'une seule coordonnée ne peut représenter ce résultat.

Mais il en est autrement si l'on fait varier les deux coordonnées à la fois, en ne s'astreignant plus à rester sur une ligne donnée, et si l'on modifie la définition de l'extraction de la racine carrée. Alors les quantités que l'on considère ne dépendent plus d'*une seule* grandeur, mais de *deux,* et méritent pour cette raison le nom de quantités *complexes*. Une opération exécutée sur une pareille quantité affecte à la fois les deux grandeurs dont celle-ci est formée, absolument comme les opérations exécutées sur une fraction ordinaire affectent les deux termes de la fraction. Grâce à l'introduction simultanée des nouvelles quantités et des nouvelles définitions d'opérations, $\sqrt{-b^2}$ n'indique plus une opération im-

possible, et le nom d'*imaginaire* ne convient plus à un tel résultat, pas plus qu'il ne convenait aux fractions et aux quantités négatives.

Telle est la conséquence fondamentale qui ressort immédiatement de la conception d'Argand. Les symboles de la forme $a + b\sqrt{-1}$, auxquels on avait réussi à ramener les résultats de toutes les opérations analytiques, n'offrent plus rien d'impossible ni d'incompréhensible ; ce sont des systèmes de deux nombres a, b, qui se combinent entre eux de la même manière que les systèmes des deux coordonnées de chaque point d'un plan.

Dès lors, les beaux résultats que Cauchy devait découvrir, par des prodiges de puissance analytique, allaient se traduire par des constructions géométriques parlant aux yeux, et la discussion des formules devenait un problème simple de la Géométrie de situation, dont Riemann a plus tard complété la solution.

La théorie des quantités complexes, qui, par les découvertes de Cauchy, était devenue la base de la théorie des fonctions, venait en même temps d'acquérir un nouveau degré d'évidence, qui la mettait au-dessus de toutes les objections et de tous les doutes, auxquels jusque-là elle avait été sujette.

Tels sont les éminents services que la découverte d'Argand a rendus à l'Analyse et à la Philosophie mathématique.

Mais la Géométrie aussi a profité, comme l'Analyse, bien qu'à un moindre degré, de l'introduction des conceptions fondées sur la découverte d'un nouveau lien entre ces deux branches de la science. On trouve dans l'Ouvrage d'Argand les premiers essais d'une méthode très-générale de Géométrie analytique pour les figures planes, que M. Bellavitis a développée plus tard avec un si grand succès, et qui permet de traiter par des procédés uniformes les questions de Géométrie élémentaire et les parties les plus élevées de la théorie des courbes. Cette méthode a l'avantage d'introduire dans les calculs les points eux-mêmes, au lieu de leurs coordonnées, et de permettre ainsi de choisir, au dernier moment, le système de coordonnées qui se présente comme le plus avantageux.

Argand a été moins heureux dans les tentatives qu'il a faites pour étendre sa méthode de représentation des points à l'espace à

trois dimensions. Cette question offre, en effet, des difficultés bien plus grandes que celles qu'il venait de résoudre, et c'est seulement trente ans plus tard que Hamilton est parvenu à les surmonter.

Nous aurions vivement désiré de pouvoir donner à nos lecteurs quelques renseignements sur la personne de l'auteur de cet important Opuscule. Nous nous sommes adressé, pour en obtenir, au savant le plus versé dans l'histoire scientifique de la Suisse, à M. R. Wolf, à qui l'on doit un *Recueil de Biographies* aussi remarquable par la profonde érudition que par l'attrait du récit. M. Wolf a eu l'obligeance de faire faire aussitôt des recherches à Genève, ville natale d'Argand. Malheureusement les informations qu'il a pu se procurer, par l'intermédiaire de M. le professeur Alfred Gautier, se réduisent à quelques lignes, que nous transcrivons ici :

« J'ai bien trouvé l'inscription de la naissance, le 22 juillet 1768, de Jean-Robert Argand, fils de Jacques Argand et de Ève Canac. C'est probablement l'auteur du Mémoire de Mathématiques en question. D'après ce qui m'a été dit par une personne qui connaissait sa famille, ce monsieur a été longtemps teneur de livres à Paris, et je présume que c'est là qu'il est mort. Il n'était point proche parent d'Aimé Argand [1], et peut-être n'était-il pas de la même famille. Il a eu un fils, qui a aussi habité Paris. »

Depuis, M. Wolf a appris qu'Argand avait eu aussi une fille, nommée Jeanne-Françoise-Dorothée-Marie-Élisabeth, mariée à Félix Bousquet, avec qui elle était allée s'établir à Stuttgart, où Bousquet avait obtenu un petit emploi. Si nous ajoutons à cela qu'Argand demeurait, vers 1813, à Paris, rue de Gentilly, n° 12, comme l'indique une note de sa main, inscrite sur le titre de l'exemplaire adressé par lui à Gergonne, nous aurons épuisé tout ce qu'il nous a été donné de recueillir sur la vie de cet inventeur, dont la modeste existence restera ignorée, mais dont les services scientifiques ont été, par Hamilton et par Cauchy, proclamés dignes de la reconnaissance de la postérité. J. Hoüel.

---

[1] Ami et collaborateur des Montgolfier, inventeur de la lampe qui porte son nom (1755-1803).

WALRAS (Léon), professeur d'économie politique à l'Académie de Lausanne. — ÉLÉMENTS D'ÉCONOMIE POLITIQUE PURE, OU THÉORIE DE LA RICHESSE SOCIALE. — Lausanne, imprimerie L. Corbaz et Cie, éditeurs. Paris, Guillaumin et Cie, éditeurs. — 1874; 1 vol. in-8°, 208 p., 2 pl.

Ce Traité est divisé en trois Parties :

PREMIÈRE PARTIE. — *Éléments d'économie politique pure,* ou *Théorie de la richesse sociale.*

§ I. — Objet et divisions de l'économie politique et sociale.

§ II. — Théorie mathématique de l'échange.

§ III. — Du numéraire et de la monnaie.

§ IV. — Théorie naturelle de la production et de la consommation de la richesse.

§ V. — Conditions et conséquences du progrès économique.

§ VI. — Effets naturels et nécessaires des divers modes d'organisation économique de la société.

DEUXIÈME PARTIE. — *Éléments d'économie politique appliquée,* ou *Théorie de la production agricole, industrielle et commerciale de la richesse.*

TROISIÈME PARTIE. — *Éléments d'économie sociale,* ou *Théorie de la répartition de la richesse par la propriété et l'impôt.*

Le premier fascicule de cet Ouvrage a seul paru ; il comprend les quatre premiers paragraphes de la première Partie.

Dans le préambule, l'auteur fait une critique méthodique des diverses définitions données de l'Économie politique, et son analyse le conduit à circonscrire nettement l'objet de cette science et à en indiquer les subdivisions principales.

A l'exemple de M. Cournot (*Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*), M. Walras se sert de formules algébriques pour faire la théorie de l'échange et du numéraire. Il est intéressant de suivre dans l'Ouvrage les déductions de l'auteur, et de voir avec quelle précision et quelle clarté il résout les problèmes difficiles qui se présentent dans un marché soumis à la libre concurrence. Nous pensons que plus d'un lecteur s'effarouchera de l'appareil algébrique employé dans cette question ; mais il nous semble difficile qu'on puisse s'en passer.

Un Ouvrage anglais sur le même sujet, suivant une méthode analogue, a paru en Angleterre, en 1871, sous le titre suivant : *The Theory of political Economy*, par M. W. Stanley Jevons. M. Walras a composé le sien sans connaître celui de l'économiste anglais, et il arrive à des conclusions *identiques* dans la théorie de l'échange. On peut donc dire avec lui que les deux Ouvrages se confirment et se font valoir l'un l'autre. J. BOURGET.

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES (¹).

T. LXXVIII, 1er semestre 1874 (suite et fin).

N° 14. Séance du 6 avril 1874.

CHASLES. — *Sur les polygones inscrits ou circonscrits à des courbes.*

Après avoir donné un résumé historique très-intéressant de cette théorie des polygones, qui a occupé les géomètres depuis fort longtemps, M. Chasles montre que le principe de correspondance s'applique avec une grande facilité à ce genre de questions, qu'il permet de généraliser, et qui le conduit en outre à traiter diverses autres questions qui se rapportent à la figure que l'on a sous les yeux. Parmi les nombreux théorèmes démontrés par M. Chasles, nous citerons les suivants :

1° *Lorsque tous les côtés d'un polygone abcd...ω doivent être tangents à des courbes respectives de classes* n', n'', n''',..., *et que tous ses sommets* a_1, b_1,..., *moins le dernier, doivent glisser sur des courbes d'ordre* m_1, m_2, m_3, ..., *le sommet libre ω décrit une courbe de l'ordre* $2m_1m_2\ldots n'n''n'''\ldots$.

2° *Lorsque tous les sommets consécutifs d'un polygone abc...d glissent sur des courbes d'ordre* m_1, m_2, m_3,..., *et que les côtés consécutifs, moins le dernier, sont tangents à des courbes de*

(¹) Voir *Bulletin*, t. VI, p. 285.

classes n', n'',..., le dernier côté enveloppe une courbe de la classe $2n'n''\ldots m_1m_2m_3\ldots$.

Faye. — *Cyclones solaires; fin de la Réponse au* Dr Reye, *et observations au sujet d'un article de la* Bibliothèque universelle de Genève *et d'une réclamation de* M. Lockyer.

Tisserand (F.). — *Observations faites à l'Observatoire de Toulouse dans les mois de février et mars* 1874.

Ces observations concernent les éclipses des satellites de Jupiter et les taches du Soleil.

Mannheim (A.). — *Construction directe du centre de courbure en un point de la section faite dans une surface par un plan quelconque.*

N° 15. Séance du 13 avril 1874.

Stephan. — *Sur l'extrême petitesse du diamètre apparent des étoiles fixes.*

Des expériences qu'il a faites, l'auteur conclut que le diamètre apparent des étoiles examinées est une très-faible fraction du nombre $0'',158$.

Vicaire (E.). — *Sur la température de la surface solaire.*

Durrande (H.). — *Déplacement d'un système de points. Propriétés géométriques dépendant des paramètres différentiels du second ordre.*

M. Durrande part de l'hypothèse que les composantes de la vitesse d'un point quelconque du système en mouvement sont des fonctions linéaires des coordonnées de ce point; dans une première Note, présentée à l'Académie le 6 mai 1872, il avait indiqué plusieurs propriétés relatives aux vitesses du système; dans la Note actuelle il s'occupe des accélérations et énonce plusieurs propositions.

Catalan (E.). — *Sur la projection stéréographique.*

N° 16. Séance du 20 avril 1874.

Faye. — *Lettre relative à un calcul de Pouillet sur le refroidissement de la masse solaire.*

PISTOYE (DE). — *Sur les équations aux différentielles partielles qui peuvent être intégrées sans fonctions arbitraires engagées sous le signe somme.*

HALPHEN. — *Sur les points singuliers des courbes algébriques planes.*

Voici quelques-uns des principaux résultats énoncés par M. Halphen :

« L'abaissement de la classe d'une courbe, dû à un point singulier quelconque, est égal au double de la somme des ordres des segments infiniment petits et infiniment voisins de ce point, interceptés par la courbe sur une sécante dont la distance au point singulier est infiniment petite du premier ordre, et qui fait des angles finis avec les tangentes de la courbe en ce point. »

L'auteur remarque que ce théorème est implicitement contenu dans un Mémoire de M. Cayley. (*Quarterly Journal*, t. VII.)

« Le nombre des points d'inflexion absorbés par un point singulier est égal au triple de l'abaissement que ce point produit dans la classe, diminué de sa multiplicité, et augmenté de la somme des multiplicités des points qui lui correspondent dans la courbe corrélative. »

M. Halphen s'occupe ensuite des développées et signale plusieurs lois générales auxquelles sont soumises les développées successives d'une courbe algébrique donnée.

N° 17. Séance du 27 avril 1874.

KRONECKER (L.). — *Sur les faisceaux de formes quadratiques et bilinéaires.*

LEDIEU (A.). — *Note sur la décomposition du travail des forces.*

PAINVIN (L.). — *Sur les courbes unicursales.*

L'auteur donne les équations explicites des polaires de divers ordres d'une courbe unicursale quelconque, lorsqu'on connaît les expressions de ses coordonnées en fonction d'un paramètre arbitraire.

FLAMMARION (C.). — *Orbite de l'étoile double γ de la Vierge.*

Combescure (É.). — *Théorème concernant les équations aux différences partielles simultanées.*

Étant données deux équations aux dérivées partielles des ordres r et s respectivement, M. Combescure en déduit une nouvelle équation de l'ordre $(r+s-1)$, et il indique diverses applications de la formule qu'il obtient.

Mannheim (A.). — *Construction directe du rayon de courbure de la courbe de contour apparent d'une surface qu'on projette orthogonalement sur un plan.*

Jordan (C.). — *Sur la limite du degré des groupes primitifs qui contiennent une substitution donnée.*

M. Jordan, qui s'était déjà occupé de cette question dans le *Journal de Liouville*, en 1871, puis dans le *Bulletin de la Société Mathématique de France*, tome I, y revient pour donner une démonstration beaucoup plus simple du théorème fondamental, et présente une limite qui embrasse tous les cas.

Renan (H.). — *Éléments et éphémérides de la planète* (127).

N° 18. Séance du 4 mai 1874.

Ledieu (A.). — *Observations à propos d'une récente Communication de M. Faye, relative à un calcul de Pouillet, sur le refroidissement de la masse solaire.*

Aoust. — *Sur les intégrales des équations différentielles des courbes qui ont même polaire.*

Le but de cette Note est de montrer comment on obtient les intégrales générales des équations différentielles des courbes de la question posée au moyen des équations données (*Comptes rendus*, 1870), du problème généralisé des *roulettes*, consistant à trouver, sous forme finie, les équations de la courbe décrite par un point lié avec une courbe non plane dans le cas où cette courbe, entraînant le point décrivant, roule sur une courbe également non plane, sous cette condition que les plans osculateurs des deux courbes coïncident à chaque instant.

Flammarion (C.). — *Phénomènes observés sur les satellites de Jupiter.*

N° 19. Séance du 11 mai 1874.

Serret (J.-A.). — *Remarques sur une Note de M. l'abbé Aoust, insérée dans le Compte rendu de la dernière séance.*

M. Serret fait remarquer qu'il a résolu, il y a déjà longtemps, les diverses questions dont M. Aoust s'occupe dans la Note mentionnée.

Ledieu (A.). — *Idées générales sur l'interprétation mécanique des propriétés physiques et chimiques des corps.*

N° 20. Séance du 18 mai 1874.

Chasles. — *Questions relatives à des séries de triangles semblables assujettis à trois conditions communes.*

M. Chasles énonce d'abord les théorèmes généraux dans lesquels les trois conditions se rapportent à trois courbes différentes; en voici quelques-uns :

1. Lorsque des triangles semblables $aa'a''$ ont leur sommet a sur une courbe d'ordre m, et leurs côtés aa', $a'a''$ tangents respectivement à deux courbes de classes n', n'', leur côté aa'' enveloppe une courbe de la classe $2mn'$; leur sommet a' décrit une courbe d'ordre $2n'n''$; leur sommet a'' décrit une courbe de l'ordre $3mn'n''$.

2. Lorsque des triangles semblables $aa'a''$ ont leurs sommets a, a' sur deux courbes d'ordre m, m_1, et leur côté aa' tangent à une courbe de classe n', leur côté aa'' enveloppe une courbe de la classe $2mn'$, et leur côté $a'a''$ une courbe de la classe $2m_1n'$; leur sommet a'' décrit une courbe de l'ordre $2mm_1n'$, ...

M. Chasles examine ensuite le cas où deux conditions se rapportent à une même courbe, et la troisième à une autre courbe, puis le cas où les trois conditions se rapportent à une même courbe. Toutes ces propositions sont démontrées à l'aide du principe de correspondance.

Faye. — *Lettre de M. Faye, avec une réplique de M.* Gautier.

Ledieu (A.). — *Idées générales sur l'interprétation mécanique des propriétés physiques et chimiques des corps* (suite).

Darboux (G.). — *Sur le choc des corps.*

Voici en quels termes M. Darboux résume l'objet de sa Note :

« Dans l'ancienne théorie du choc des corps élastiques, on décomposait le phénomène en deux portions, l'une pendant laquelle les corps se compriment, l'autre pendant laquelle il y a décompression, et l'on admettait que les percussions reçues par les deux corps dans les deux portions du choc sont rigoureusement égales. Dans la séance du 19 janvier 1874, M. Resal s'est proposé de donner la solution complète du problème, en admettant seulement que la force vive totale a la même valeur avant ou après le choc, ce qui est de toute évidence si l'on fait abstraction du frottement, des déformations permanentes et des mouvements vibratoires de toute nature qui subsistent après le choc. Les résultats obtenus de cette manière sont d'une telle simplicité, ils offrent par eux-mêmes un tel intérêt, qu'il m'a paru utile de les démontrer, en partant seulement du principe des forces vives étendu avec les modifications convenables au cas où il y a des percussions. »

Violle (J.). — *Sur la température du Soleil.*

N° 21. Séance du 25 mai 1874.

Resal (H.). — *Note sur le mouvement du pendule conique, en ayant égard à la résistance de l'air.*

Dans une expérience sur le pendule conique, M. Resal remarque que la décroissance des arcs d'écart maxima était un peu plus rapide lorsque la masse du pendule recevait à l'origine une vitesse horizontale que lorsqu'on se plaçait dans les conditions de l'expérience de Foucault ; il crut devoir attribuer ce fait à la résistance de l'air, et c'est ce que justifie l'analyse qu'il présente aujourd'hui, dans laquelle il a supposé la résistance de l'air proportionnelle au carré de la vitesse.

Secchi (le P.). — *Observations sur le spectre des comètes.*

Catalan (E.). — *Sur l'addition des fonctions elliptiques.*

Aoust. — *Réponse de M. l'abbé* Aoust *aux observations de M.* Serret.

N° 22. Séance du 1er juin 1874.

Bontemps (Ch.). — *Du mouvement de l'air dans les tuyaux.*

Aoust. — *Sur les intégrales des équations différentielles des courbes dont le lieu des centres des ellipsoïdes osculateurs, semblables et semblablement placés, est une courbe donnée.*

Durrande (H.). — *Sur un problème de Mécanique.*

Dans cette Note, relative aux arcs *synchrones,* l'auteur s'est proposé de rattacher les diverses questions qui se rapportent à ce sujet à une même relation géométrique.

Zeuthen (H.-G.). — *Sur les principes de correspondance du plan et de l'espace.*

Voici les deux théorèmes énoncés et démontrés par M. Zeuthen :

1. Soit donnée dans un plan une correspondance telle : 1° qu'à un point quelconque X correspondent α' points X', et à un point X', α points X; 2° que le lieu des points X ou X' dont les points homologues se trouvent sur une droite donnée soit une courbe d'ordre β ; alors il existe dans le plan $(\alpha + \alpha' + \beta)$ points où deux homologues X et X' coïncident.

2. Soit donnée dans l'espace une correspondance telle : 1° qu'à un point quelconque X correspondent α' points X', et à un point X', α points X; 2° que les lieux des points X et X' dont les points homologues se trouvent sur une droite donnée soient des courbes dont les ordres soient respectivement égaux à β et β' ; alors il existe $(\alpha + \alpha' + \beta + \beta')$ points où deux homologues X et X' coïncident.

Amigues. — *Sur l'aplatissement de la planète Mars.*

Darboux (G.). — *Sur le choc des corps.*

Cette Note complète la Communication précédente en déterminant, par une voie purement géométrique, l'expression de la percussion totale.

Perrier (F.). — *Sur la nouvelle triangulation de l'île de Corse.*

N° 23. Séance du 8 juin 1874.

Chasles. — *Détermination du nombre des triangles semblables qui satisfont à quatre conditions.*

Les considérations préliminaires dont M. Chasles fait précéder l'énumération des nombreuses propositions qu'il énonce sont très-importantes pour l'application du principe de correspondance : nous pensons qu'il est utile de les reproduire intégralement.

« Lorsque l'une des quatre conditions auxquelles doivent satisfaire des triangles semblables à un triangle donné est indépendante des trois autres, le nombre des triangles cherché est une conséquence immédiate des théorèmes compris dans ma Communication précédente. Je n'aurai donc point à parler de ce cas de la question générale ; mais, lorsque la quatrième condition se lie à l'une des premières, la question n'est plus une conséquence des théorèmes précédents, et elle présente, en général, plus de difficultés.

» En voici la raison. Dans les premières recherches, on a toujours eu à déterminer un lieu géométrique d'un sommet des triangles, ou une courbe enveloppe d'un côté, et le principe de correspondance s'appliquait immédiatement à ces deux recherches ; mais maintenant ce n'est plus un lieu géométrique ou une courbe enveloppe qu'il faut trouver, c'est un nombre déterminé de solutions ; et l'on ne peut plus, en général, se servir de deux séries de points qui se correspondent sur une droite, ou, ce qui revient au même, de deux séries de droites qui se correspondent autour d'un même point. Mais s'il arrive que l'une des courbes de la question soit unicursale, comme dans le cas d'une conique, on établira immédiatement sur cette courbe les deux séries de points que nécessite le principe de correspondance, et la solution s'ensuivra. Or, si l'on a reconnu, par les diverses questions relatives au sujet, que la quatrième condition introduite ne donne pas lieu d'avoir égard aux points multiples de la courbe que l'on veut considérer, et qu'ainsi la solution générale pour une courbe quelconque ne serait point modifiée dans le cas où l'on supposerait que cette courbe eût quelque point multiple, on pourra regarder le résultat relatif à une courbe unicursale comme étant celui même qu'on obtiendrait pour une courbe quelconque. Cette considération autorise donc à supposer une des courbes uni-

cursales, et à former sur cette courbe les deux séries de points que demande le principe de correspondance.

» Alors on a, dans chaque question, plusieurs moyens différents de solution ; d'abord, parce qu'il peut se trouver sur une même courbe plusieurs points dont chacun donne lieu à l'application du principe de correspondance ; puis, parce qu'il peut se trouver plusieurs courbes dont chacune offrira ainsi un ou plusieurs moyens de solution. Il y aura donc, dans les questions qui vont se présenter, deux, trois, quatre manières d'appliquer le principe de correspondance. Il est bon de n'en négliger aucune comme vérification, et à raison des solutions étrangères qui peuvent être différentes dans chaque cas, et même ne pas exister. Je donnerai un exemple de cette multiplicité de solutions, mais ensuite une seule solution, pour restreindre l'étendue de cette Communication. »

Tresca. — *Sur la répartition de la chaleur développée par le choc.*

Cayley (A.). — *Note sur une formule d'intégration indéfinie.*

La proposition énoncée par M. Cayley est la suivante :

Si θ désigne un entier positif quelconque, l'intégrale

$$\int \frac{(x+p)^{m+n-\theta}\,(x+q)^{\theta}\,dx}{x^{m+1}\,(x+p+q)^{n+1}}$$

a pour valeur algébrique

$$(x+p)^{m+n-\theta+1}\,(x+p+q)^{-n}\,x^{-m}\,(\mathrm{A}+\mathrm{B}x+\mathrm{C}x^2+\ldots+\mathrm{K}x^{\theta-1}),$$

pourvu que les quantités m, n, p, q vérifient la condition unique

$$[m]^{\theta}\,p^{2\theta}+\frac{\theta}{1}[m]^{\theta-1}\,[n]^{1}\,p^{2\theta-2}\,q^{2}+\ldots+[n]^{\theta}\,q^{2\theta}=0,$$

où $[m]^{\theta}$ représente $m\,(m-1)\ldots(m-\theta+1)$.

Lucas (F.). — *Sur les petits mouvements d'un système matériel en équilibre stable.*

Combescure (É.). — *Observations sur une Note de M. Aoust.*

Darboux (G.). — *Sur le frottement dans le choc des corps.*

Weyr (Em.). — *Sur les lignes de courbure des surfaces réglées.*

L'auteur démontre le théorème suivant qu'il croit nouveau :

Les lignes de courbure d'une surface réglée sont touchées par toutes les génératrices de la surface, qui rencontrent le cercle imaginaire à l'infini.

On peut voir à ce sujet une Note de M. Darboux dans son Ouvrage ayant pour titre : *Sur une classe remarquable de courbes, etc.*, 1873 ; p. 23.

Bontemps (C.). — *Sur le mouvement de l'air dans les tuyaux.*

N° 24. Séance du 15 juin 1874.

Faye. — *Théories solaires. Réponse à quelques critiques récentes.*

Fouret. — *Sur quelques propriétés des systèmes de courbes* ($\mu = 1$, $\nu = 1$).

Cette Note, qui fait suite à une Communication précédente, traite des systèmes de courbes représentés par l'équation différentielle

$$L(x\,dy - y\,dx) - M\,dy + N\,dx = 0,$$

où L, M, N désignent des fonctions linéaires de x et de y. L'auteur énonce plusieurs théorèmes intéressants.

Durrande (H.). — *Généralisation d'un théorème communiqué dans la séance du 1er juin.*

M. Durrande énonce la proposition suivante : « Avec une loi de force, par laquelle la vitesse du mobile ne dépend que des coordonnées de la position de ce mobile, si une série (f_1) de courbes homothétiques est telle, que tous les arcs de ces courbes compris entre deux courbes d'une série (ψ) soient *synchrones*, il existe une infinité d'autres séries (f_2) de courbes dont les arcs, compris entre deux courbes (ψ), sont également *synchrones*. »

N° 25. Séance du 22 juin 1874.

Clausius (R.). — *Sur un cas spécial du viriel.*

Ledieu (A.). — *Théorie du choc des corps, en tenant compte des vibrations atomiques.*

Ledieu (A.). — *Observations au sujet de la Réponse de M.* Faye *à la critique concernant son complément au Mémoire de Pouillet sur la radiation solaire.*

Jordan (C.). — *Sur les systèmes de formes quadratiques.*

Le Mémoire de M. Jordan est consacré à la solution des problèmes suivants :

1° Réduire un système de deux fonctions quadratiques;

2° Trouver les conditions d'équivalence de deux semblables systèmes;

3° Déterminer les substitutions qui transforment l'un dans l'autre deux systèmes équivalents.

Darboux (G.). — *Sur le frottement dans le choc des corps; addition à une Note du* 8 *juin* 1874.

M. Darboux fait remarquer que plusieurs des résultats établis dans sa Note du 8 juin se trouvent dans une thèse présentée, en 1849, par M. Phillips à la Faculté des Sciences de Paris. « Il était de mon devoir, dit M. Darboux, de signaler le beau travail dans lequel se trouve complétement résolue une des questions que je m'étais proposées dans mes études sur le choc des corps. » Le Mémoire de M. Phillips a été inséré dans le tome XIV (1re série) du *Journal de M. Liouville.*

N° 26. Séance du 29 juin 1874.

Ledieu (A.). — *Théorie du choc des corps, en tenant compte des vibrations atomiques* (suite et fin).

Dumas. — *Rapport sur l'état des préparatifs pour les expéditions chargées par l'Académie d'aller observer le passage de Vénus sur le Soleil, le* 9 *décembre* 1874.

Violle (J.). — *Sur la température du Soleil.*

Roudaire. — *Méridienne de Biskra, en Algérie.*

Halphen. — *Sur un point de la théorie des fonctions abéliennes.*

Étant donnée l'équation entière $T(x, y) = 0$ définissant l'irrationnelle y, M. Halphen se propose de déterminer, dans le cas général, les conditions que doit remplir un polynôme $f(x, y)$ pour

que les valeurs critiques des variables ne rendent pas infinie l'intégrale $\int \frac{f(x,y)\,dx}{\frac{\partial T}{\partial y}}$.

Fouret. — *Intégration géométrique de l'équation*

$$L(x\,dy - y\,dx) - M\,dy + N\,dx = 0,$$

dans laquelle L, M, N *désignent des fonctions linéaires de* x *et* y.

Chevilliet. — *Sur le degré d'exactitude de la formule de Simpson, relative à l'évaluation approchée des aires.*

BULLETIN de la Société Mathématique de France (1).

T. I; 1873.

Weyr (Émile). — *Quelques théorèmes nouveaux sur la lemniscate.* (1 p.)

Halphen. — *Sur les courbes tracées sur une surface du second ordre.* (2 p.)

L'auteur donne une démonstration géométrique très-simple de la proposition suivante, qu'il avait énoncée dans les *Comptes rendus*, t. LXX, p. 380 :

« Les surfaces de degré minimum, qui passent par une ligne algébrique quelconque, tracée sur une surface du second ordre, coupent cette dernière, en outre, seulement suivant des droites d'un même système. »

Laguerre. — *Sur la représentation sur un plan de la surface du troisième ordre, qui est la réciproque de la surface de Steiner.* (7 p.)

M. Laguerre se propose d'étudier, à l'aide de la représentation sur un plan, une surface qu'il a déjà étudiée analytiquement dans les *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XI, 1872; il s'occupe spécialement de la surface du troisième ordre qui contient les six arêtes

(1) Publié chaque année en 6 fascicules grand in-8°.

d'un tétraèdre. Après avoir établi quelques propositions relatives à la représentation de cette surface, l'auteur en conclut, d'une manière simple et élégante, les lignes asymptotiques, et en signale un assez grand nombre de propriétés.

KOEHLER. — *Sur la construction des courbes du cinquième et du sixième ordre, à points multiples.* (3 p.)

L'auteur s'occupe particulièrement des courbes du cinquième ordre, ayant cinq points doubles, et des courbes du sixième ordre, possédant sept, huit ou neuf points doubles.

LAGUERRE. — *Sur l'application de la théorie des formes binaires à la Géométrie des courbes tracées sur une surface du second ordre.* (8 p.)

Après avoir établi la forme qu'on peut donner à l'équation d'une courbe tracée sur une surface du second ordre, l'auteur s'occupe des sections planes, puis de la recherche de la forme la plus simple que l'on peut donner à l'équation d'une courbe.

LEMOINE (E.). — *Sur une question de probabilité.* (1 p.)

Une tige se brise en trois morceaux; quelle est la probabilité pour que, avec ces trois morceaux, on puisse former un triangle?

JORDAN (C.). — *Sur la limite de transitivité des groupes non alternés.* (32 p.)

M. Jordan démontre les théorèmes importants dont les énoncés suivent :

Théorème I. — *Soit p un nombre premier impair. Un groupe de degré $p+k$ ne pourra être plus de k fois transitif si $k>2$, à moins de contenir le groupe alterné.*

Théorème II. — *Un groupe de degré $2p+k$ (p étant premier et >3) ne pourra être plus de k fois transitif, à moins de contenir le groupe alterné: 1° si $k>2$, lorsque p est de la forme $3n-1$; 2° si $k>3$, lorsque p est de la forme $3n+1$.*

Théorème III. — *Soient p un nombre premier impair, q un entier premier à p et contenu entre p^m et p^{m+1}. Un groupe de degré $p^n q+k$ ne pourra être plus de k fois transitif, si l'un des trois systèmes de conditions ci-dessous n'est pas satisfait: 1° $k<5$; 2° $k\leqq q$; 3° $m+n\geqq k-\frac{\log k}{\log 2}-3$.*

On remarquera que ce système de conditions est entièrement indépendant de p. Les deux premiers théorèmes s'établissent très-facilement en faisant intervenir une remarquable proposition donnée par M. Sylow (*Mathematische Annalen*, t. V); le troisième théorème est beaucoup plus difficile à démontrer.

LAGUERRE. — *Sur les cônes du second degré qui passent par six points donnés de l'espace.* (4 p.)

Par six points donnés dans l'espace on peut mener une infinité de cônes du second ordre; les génératrices de ces cônes forment un *complexe* du sixième ordre; par les six points donnés on peut aussi mener une cubique gauche bien déterminée. Parmi les propriétés énoncées par M. Laguerre, signalons la suivante : « Un plan pris arbitrairement est tangent à quatre cônes du complexe; les génératrices de contact forment un quadrilatère complet; les trois points de rencontre des diagonales de ce quadrilatère sont les points où le plan coupe la cubique gauche K. »

M. Laguerre termine en indiquant le rôle que jouent ces cônes dans la théorie des fonctions ultra-elliptiques du premier ordre.

LAGUERRE. — *Sur quelques théorèmes d'Arithmétique.* (4 p.)

FLYE SAINTE-MARIE. — *Sur quelques propriétés des courbes gauches fermées.* (1 p.)

HUGO (comte L.). — *Sur un dodécaèdre antique, conservé au musée du Louvre.* (1 p.)

ANDRÉ (Désiré). — *Théorème nouveau sur les factorielles.* (3 p.)

Voici le théorème démontré par M. André :

« Si les nombres entiers $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, dont la somme est N, forment un système premier d'ordre k, le quotient

$$\frac{(N-k)!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_n!}$$

est un nombre entier. »

Suivant l'auteur, l'ensemble des entiers $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ forme un système premier d'ordre k, s'il y a k de ces entiers qui ne soient pas divisibles par l'un des facteurs *les plus communs*.

BOURGET (J.). — *Théorie mathématique des expériences de Pinaud, relatives aux sons rendus par les tubes chauffés.* (14 p.)

En 1835, Pinaud, professeur de Physique à Toulouse, a fait connaître et a étudié un phénomène acoustique remarquable, qui se produit quand on laisse refroidir un tube thermométrique à l'extrémité duquel est soufflée une boule qu'on a chauffée assez fortement. Après avoir établi expérimentalement plusieurs lois générales, Pinaud chercha une formule empirique donnant le nombre des vibrations sonores en fonction de la longueur du tube, de son rayon et du rayon de la boule. Les expériences de Pinaud ont été répétées par C. Marx (1841), puis par M. Sondhaus (1850); ce dernier donna une formule très-simple pour déterminer le nombre des vibrations, mais sans présenter aucune raison théorique. M. Bourget, s'appuyant sur les principes établis par Duhamel, dans son Mémoire sur les tuyaux à cheminée, se propose de faire connaître les lois véritables des phénomènes observés par Pinaud et M. Sondhaus; les formules générales sont compliquées; mais si l'on regarde la section du tube comme très-petite par rapport à celle de la boule, elles se simplifient considérablement, et M. Bourget retrouve précisément les formules de Sondhaus.

Laguerre. — *Sur la biquadratique sphérique et sur la détermination du plan osculateur en un point de cette courbe.* (3 p.)

Partant de la notion des foyers de la biquadratique sphérique (intersection d'une sphère et d'une surface du second ordre), M. Laguerre établit très-simplement par la Géométrie plusieurs propriétés du plan osculateur, desquelles résultent diverses constructions de ce plan.

Mannheim (A.). — *Sur les trajectoires des points d'une droite mobile dans l'espace.* (9 p.)

On s'est surtout occupé, jusqu'à présent, d'étudier le déplacement d'une droite sur un plan; M. Mannheim se propose d'étudier ce qui est relatif au déplacement d'une droite dans l'espace, lorsque cette droite décrit une surface de détermination. Il donne une vingtaine de théorèmes, parmi lesquels nous citerons les suivants :

1. Les tangentes aux trajectoires de tous les points d'une droite D appartiennent à un paraboloïde hyperbolique dont un plan directeur est perpendiculaire à la droite Δ, conjuguée de D.

2. A un instant quelconque du déplacement d'une droite D, les

plans osculateurs des trajectoires des points de cette droite enveloppent une surface développable du quatrième ordre et de la troisième classe.

3. En général, il n'y a pas sur une droite mobile un point qui soit point d'inflexion sur sa trajectoire.

4. Lorsque quatre points d'une droite mobile restent sur quatre plans donnés, un point quelconque de cette droite décrit une conique.

Halphen. — *Sur le mouvement d'une droite.* (3 p.)

M. Halphen se propose, dans cette Note, de compléter une proposition donnée par M. Mannheim dans le précédent Mémoire, et relative à une droite mobile dont quatre points restent sur quatre plans donnés.

Voici les propriétés signalées et démontrées géométriquement par M. Halphen :

« Si deux droites sont partagées par quatre plans en segments constants et proportionnels : 1° tous leurs points décrivent des ellipses; 2° les ellipses décrites par deux points homologues sont, dans le même plan, concentriques et homothétiques; 3° le lieu des centres de ces ellipses est la droite unique partagée par les plans donnés en segments proportionnels à ceux des droites données, et les plus petits possible; 4° chacune de ces deux droites fait, dans son mouvement, un angle constant avec cette ligne des centres. »

Pistoye (de). — *Sur les sections planes des cônes circulaires obliques.* (3 p.)

L'auteur se propose de démontrer d'une façon *élémentaire* que les sections planes d'un cône circulaire oblique sont de même nature que celles d'un cône droit, en partant des propriétés des cercles focaux.

Fouret. — *Détermination, par le principe de correspondance, du nombre des points d'intersection de trois surfaces algébriques d'ordres quelconques.* (2 p.)

Koehler. — *Sur les réseaux des courbes planes.* (5 p.)

L'auteur complète un théorème connu sur le nombre des courbes d'un réseau qui possèdent un point de rebroussement, en démon-

trant la proposition suivante : « Tout point multiple commun, d'ordre p, diminue de $12p(p-1)$ le nombre des courbes du réseau à ce point de rebroussement. »

M. Koehler termine par l'énoncé d'une proposition relative aux points doubles d'une courbe du sixième ordre; cette proposition est la suivante : « Un système de courbes du sixième ordre est assujetti à avoir neuf points doubles, huit d'entre eux sont fixes; pour que la courbe ait un dixième point double, le neuvième point doit décrire un lieu du cent-huitième ordre. »

On sait que l'étude des relations géométriques existant entre les points doubles d'une courbe algébrique, lorsque le nombre de ces points, multiplié par 3, dépasse le nombre de conditions qui déterminent la courbe, est encore à faire, et elle doit présenter de très-grandes difficultés.

Halphen. — *Mémoire sur la détermination des coniques et des surfaces du second ordre* (Ire Partie). (12 p.)

L'objet principal de cette première Partie est la démonstration du beau théorème que M. Chasles a découvert par l'induction, et qu'on peut énoncer ainsi :

Dans un système plan, le nombre des coniques qui passent en un point étant μ et le nombre de celles qui touchent une droite donnée étant ν, le nombre des coniques qui satisfont à une condition quelconque est $\alpha\mu+\beta\nu$, les nombres α et β ne dépendant que de la condition donnée..

M. Halphen démontre d'abord plusieurs théorèmes généraux et importants sur les intersections des courbes planes algébriques; nous citerons les premiers :

1. Le nombre des intersections d'une courbe et d'une droite, confondues en un point O, est égal à la somme des ordres des segments infiniment petits interceptés par la courbe et la droite sur une sécante quelconque, dont la distance au point O est infiniment petite du premier ordre.

2. Le nombre des intersections de deux courbes, réunies en un point O, est égal à la somme des ordres des segments infiniment petits interceptés par les deux courbes sur une sécante dont la distance au point O est infiniment petite du premier ordre, et qui ne coïncide avec aucune tangente à l'une des courbes en ce point.

M. Halphen démontre ensuite, par la Géométrie, le théorème de M. Chasles; il fait remarquer que ce théorème avait été démontré analytiquement par Clebsch (*Mathematische Annalen*, t. VI, 1873, p. 1).

Saint-Germain (de). — *Sur la résultante de deux équations du second degré.* (2 p.)

Jordan (C.). — *Sur le mouvement des figures dans le plan et dans l'espace.* (4 p.)

L'auteur se propose d'établir que les équations qui définissent analytiquement le mouvement d'une figure plane dans son plan fournissent immédiatement, outre les principaux théorèmes déjà connus, une classe étendue de propositions nouvelles; il applique ensuite les mêmes principes au mouvement d'un solide dans l'espace.

Allégret. — *Sur la courbe balistique.* (1 p.)

Il s'agit de l'intégration des équations du mouvement d'un projectile, lorsque la loi de résistance est représentée par $a + bv^n$.

Liguine (V.). — *Sur le lieu des points d'un système invariable mobile d'une manière générale dans l'espace, dont les accélérations du premier ordre sont constantes.* (3 p.)

L'auteur démontre le théorème suivant : « Dans le mouvement le plus général d'un système invariable, les lieux géométriques des points du système qui, à un instant considéré, ont des accélérations du premier ordre constantes, sont des ellipsoïdes à trois axes inégaux, dont le centre commun est le centre respectif des accélérations du même ordre. »

Resal (H.). — *Sur un théorème de Poncelet et sa généralisation, par M.* Horvart. (3 p.)

Le théorème en question consiste à substituer à $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ le trinôme $\lambda x + \mu y + \nu z$ dans des conditions telles, que, en considérant x, y, z comme les composantes rectangulaires d'une force, l'erreur relative soit aussi petite que possible lorsque la direction de cette force est comprise dans l'angle trièdre formé par les composantes. M. Resal propose une solution plus simple, qui permet, en même temps, de mettre λ, μ, ν sous une forme élégante.

MATHIEU (É.). — *Mémoire sur la théorie des dérivées principales et son application à la Mécanique analytique.* (18 p.)

M. Mathieu définit d'abord ce qu'il entend par *dérivées virtuelles, dérivées principales,* ce qu'il nous serait difficile de faire ici; il donne ensuite diverses propriétés relatives aux dérivées principales. Cela lui permet de simplifier la démonstration de plusieurs formules de Mécanique, et de généraliser certaines relations établies par Jacobi.

JORDAN (C.). — *Mémoire sur les groupes primitifs.* (47 p.)

M. Jordan résume ainsi l'objet de son Mémoire :

« Nous avons démontré (*Journal de Liouville,* 2e série, t. XVI) que le degré d'un groupe primitif G, ne contenant pas le groupe alterné, mais contenant une substitution donnée A qui déplace N lettres, ne saurait dépasser une certaine limite $L = N + M$. La quantité M est une fonction $F(N)$ du nombre N.

» Nous examinons, dans ce Mémoire, le cas où l'ordre de A est un nombre premier p. Tous les autres cas peuvent se ramener à celui-là; car une substitution quelconque, élevée à une puissance convenable, donne une substitution d'ordre premier.

» Nous arrivons à ce résultat remarquable, qu'*on peut assigner à* M *une valeur qui ne dépend pas du nombre* p, *mais seulement du nombre* q *des cycles de* A. Nous démontrons, en effet, qu'on peut assigner deux fonctions de q, $\varphi(q)$ et $f(q)$ jouissant de la propriété suivante :

» *Le degré d'un groupe primitif* G, *ne contenant pas le groupe alterné, mais contenant une substitution* A *d'ordre premier* p *et à* q *cycles, ne peut dépasser* $pq + \varphi(q)$ *si l'on a* $p > f(q)$. »

L'auteur, discutant ses formules à la fin de son Mémoire, est conduit à penser que les limites qu'il indique sont loin d'être assez resserrées.

HALPHEN. — *Sur un problème de probabilité.* (3 p.)

Une tige se brise en n morceaux; quelle est la probabilité que ces n morceaux soient propres à former un polygone fermé?

Cette probabilité est $1 - \frac{n}{2^{n-1}}$.

BROCARD (H.). — *Démonstration de la proposition de Steiner relative à l'enveloppe de la droite de Simson.* (2 p.)

On sait, d'après Simson, que les projections d'un point de la circonférence d'un cercle circonscrit à un triangle sur les trois côtés de ce triangle sont en ligne droite; Steiner a montré, le premier, que l'enveloppe de cette droite est une hypocycloïde à trois rebroussements. M. Brocard présente une démonstration très-simple de ce dernier théorème.

Halphen. — *Mémoire sur la détermination des coniques et des surfaces du second ordre* (IIe Partie). (14 p.)

Après avoir établi plusieurs propositions relatives aux droites-coniques dans les complexes plans de coniques et dans les systèmes communs à deux complexes, M. Halphen démontre géométriquement le théorème de M. Cremona, qu'on peut énoncer ainsi : « *Le nombre des coniques satisfaisant à une condition triple et à une condition double indépendantes est de la forme* $\gamma\rho + \delta\sigma + \varepsilon\tau$, *les nombres* ρ, σ, τ *ne dépendant que de la condition triple, et les nombres* γ, δ, ε *ne dépendant que de la condition double.* » M. Cremona, ainsi qu'il le dit expressément, a tiré ce théorème des travaux de M. Chasles, où il est implicitement contenu, et il s'est borné à l'énoncer explicitement.

M. Halphen donne ensuite une représentation symbolique, à l'aide d'un produit de facteurs, des théorèmes de M. Chasles et de M. Cremona, et il termine en faisant plusieurs applications intéressantes de ses formules symboliques.

Laguerre. — *Mémoire sur la géométrie de la sphère.* (8 p.)

Cette première Partie du Mémoire est consacrée à des considérations préliminaires sur le rapport anharmonique dans le plan, et les systèmes homographiques. Après avoir défini le rapport anharmonique de quatre points situés d'une manière quelconque dans le plan, M. Laguerre établit plusieurs propositions relatives au cas où les quatre points sont sur un cercle, puis il montre comment on peut utiliser ces propositions pour obtenir de nombreuses relations métriques, en prenant pour point de départ des propriétés connues sur les coniques.

Liguine (V.). — *Note historique sur le problème des engrenages cylindriques.* (2 p.)

Halphen. — *Applications nouvelles d'une proposition sur les congruences de droites.* (3 p.)

M. Halphen avait donné, dans les *Comptes rendus* (2 janvier 1872), la proposition suivante : « Le nombre des droites communes à deux congruences est égal au produit des ordres de ces congruences augmenté du produit de leurs classes. » Il applique ce théorème à la résolution des trois problèmes dont les énoncés suivent :

1° Chacune des six arêtes d'un tétraèdre doit faire partie d'une congruence donnée; quel est le nombre des tétraèdres satisfaisant à la question?

2° Un angle constant se meut de telle sorte que chacun de ses côtés engendre une congruence donnée; quel est le degré de la surface décrite par son sommet?

3° Chaque arête d'un trièdre trirectangle doit faire partie d'une congruence donnée; combien y a-t-il de trièdres satisfaisant à la question?

Les solutions de ces trois problèmes s'expriment en fonction des ordres et des classes des congruences données.

Jordan (C). — *Questions de probabilités.* (2 p.)

Fouret. — *Sur l'application du principe de correspondance à la détermination du nombre des points d'intersection de trois surfaces ou d'une courbe gauche et d'une surface.* (2 p.)

Picquet. — *Sur les courbes gauches algébriques; surface engendrée par les sécantes triples; nombre des sécantes quadruples.* (27 p.)

Après avoir établi plusieurs relations préliminaires, en prenant pour point de départ les formules de Cayley, M. Picquet donne la solution des deux questions énoncées et fait plusieurs applications. Voici les principaux résultats obtenus par l'auteur :

1. Le degré de la surface engendrée par les sécantes simples droites (rencontrant la courbe en trois points) d'une courbe d'ordre m est égal à

$$(m-z)\left[h_m - \frac{1}{6}\,m(m-1)\right];$$

h_m est le nombre des sécantes doubles issues d'un point quelconque.

2. Le nombre des sécantes quadruples pour une courbe d'ordre m est égal à

$$\frac{1}{2}h_m(h_m-4m+11)-\frac{1}{24}m(m-2)(m-3)(m-13).$$

M. Picquet fait remarquer, à la fin de son Mémoire, que M. Zeuthen avait déjà démontré ces formules en 1870 (*Annali di Matematica*).

LAGUERRE. — *Sur un genre particulier de surfaces dont on peut intégrer les lignes géodésiques.*

JORDAN (C.). — *Question de probabilité.*

Trouver la probabilité pour que quatre points pris au hasard sur une sphère forment un quadrilatère sphérique convexe.

THE TRANSACTIONS OF THE ROYAL IRISH ACADEMY. — Dublin ([1]).

T. XXIV; 1870 (fin).

BALL (R.-St.). — *Sur les petites oscillations d'un corps solide autour d'un point fixe sous l'action de forces données, et en particulier sous l'action de la pesanteur.* (35 p.)

Un corps mobile autour d'un point fixe et soumis à l'action de certaines forces *qui ne dépendent que de sa position* est légèrement écarté de sa position d'équilibre; on sait que cet écart peut être réalisé par une certaine rotation autour d'un certain axe que l'on nommera *axe de déplacement*. On donne alors au corps une petite vitesse de rotation autour d'un autre axe qui sera l'*axe instantané initial*. Dans quelles conditions le mouvement sera-t-il oscillatoire, et quelle sera sa nature?

Les équations du mouvement étant linéaires, leur solution dépend d'une équation cubique : ce sont les racines de cette équation qui font connaître la nature du mouvement.

Lorsque ces racines sont réelles, positives et inégales, il existe trois axes *normaux* passant par le point fixe et jouissant de cette

---

([1]) Voir *Bulletin*, t. I, p. 306.

propriété remarquable : c'est que, si l'axe de déplacement et l'axe instantané initial se confondent avec l'un d'eux, le mouvement du corps se compose d'oscillations simples autour de ces trois axes normaux. Ces oscillations suivent la loi du pendule.

Lorsqu'une seule des racines est réelle et positive, si l'on fait encore coïncider l'axe de déplacement et l'axe instantané avec l'axe normal correspondant à cette racine, l'équilibre est stable; mais il est instable pour toute autre position initiale de ces mêmes axes.

Lorsque deux racines sont réelles, positives et inégales, tandis que la troisième est négative, et que l'on a construit les axes normaux correspondants, suivant que le plan de ces axes contient ou non l'axe de déplacement et l'axe instantané, l'équilibre est stable ou instable.

On voit que ces axes normaux sont liés aux petits mouvements du corps d'une manière plus intime et plus naturelle que les axes principaux d'inertie.

Si les forces données ont un potentiel, on peut trouver les axes normaux par une construction géométrique.

Pour amener le corps de sa position d'équilibre à une position voisine, il faut dépenser une quantité d'énergie (force vive) qui dépend de la position de l'axe de déplacement. Si l'on porte sur chacun de ces axes une longueur proportionnelle à la rotation qu'une quantité donnée d'énergie peut produire autour de cet axe, le lieu des extrémités de ces longueurs est *l'ellipsoïde d'égale énergie*.

Les axes normaux forment un système de diamètres conjugués, tant dans l'ellipsoïde d'égale énergie que dans l'ellipsoïde de Poinsot.

Dans le cas où le corps n'est soumis qu'à l'action de la pesanteur, l'auteur arrive à un grand nombre de théorèmes sur les rapports de position et de longueur qui existent entre les axes normaux et les deux ellipsoïdes centraux.

T. XXV; 1872.

Ball (R.-St.). — *Compte rendu d'expériences sur le mouvement des tourbillons annulaires dans l'air*. (21 p., 7 pl.)

Voici le problème que l'auteur se propose de résoudre : un an-

neau gazeux tournant, projeté avec une certaine vitesse, est retardé graduellement par l'air; suivant quelle loi agit la force de résistance?

Décrivons d'abord sommairement l'appareil. Une boîte en bois cubique, de 2 pieds de haut, porte sur une de ses faces verticales une ouverture circulaire fermée par une toile fortement tendue; cette toile subit le choc d'un pendule qui tombe constamment d'une même hauteur, résultat auquel on parvient en le mettant en liberté par le jeu d'un électro-aimant. Le mouvement de la toile projette en avant un anneau d'air qui sort de la boîte par la face opposée et vient choquer un disque suspendu, placé successivement à diverses distances. Le déplacement du disque à l'instant du choc ferme un courant, et l'on peut ainsi mesurer très-exactement, à l'aide d'un chronoscope de Wheatstone, le temps employé par l'anneau d'air pour parcourir telle ou telle distance.

Le parcours de l'anneau variait, dans les expériences faites par l'auteur, depuis une distance de 4 pieds à partir du devant de la boîte, correspondant à une vitesse de l'anneau de 10,2 pieds par seconde, jusqu'à une distance de 20 pieds, correspondant à une vitesse de 4,3 pieds seulement.

La discussion des résultats montre que la force retardatrice varie *en raison directe de la vitesse de l'anneau*, l'espace s, le temps t et la vitesse v étant liés par les équations

$$s = 27,7\,[1 - (0,69)^t],$$
$$v = \frac{ds}{dt} = 10,2\,(0,69)^t,$$
$$\frac{d^2s}{dt^2} = -0,37\,v.$$

Ball (R.-St.). — *Théorie des vis : étude géométrique sur la Cinématique, l'équilibre et les petites oscillations d'un corps solide.* (61 p., 2 pl.)

Dans ce Mémoire, M. Ball, s'inspirant des idées de Poinsot. arrive par des procédés géométriques à un grand nombre d'importants théorèmes sur le mouvement d'un corps solide; ces théorèmes se déduisent des deux propositions suivantes, dues, comme on sait, à notre illustre géomètre :

1° Tout déplacement infiniment petit d'un corps solide consiste

dans un mouvement hélicoïdal autour d'un axe spontané de rotation et de glissement.

2° Tout système de forces appliquées à un corps solide peut se réduire à un couple et à une force *perpendiculaire au plan de ce couple*.

Il résulte évidemment de la première proposition que deux mouvements hélicoïdaux infiniment petits peuvent toujours se composer en un seul. Mais la loi de cette composition n'avait pas été jusqu'ici donnée en termes simples; M. Ball y est arrivé à l'aide de considérations dont la nouveauté exige l'emploi de quelques néologismes.

Il appelle *screw* (*vis*) tout axe spontané de rotation et de glissement.

Le *pitch* (*hauteur de la vis*) est le rapport de la longueur du glissement à l'angle de la rotation.

Le mot *twist* (*torsion*) désigne le mouvement hélicoïdal.

Enfin le mot *wrench*, que nous traduirons par *effort*, exprime l'ensemble du couple et de la force perpendiculaire à ce couple, auquel on peut réduire tout système de forces appliquées à un corps solide. Le couple de l'*effort* se comporte comme la translation de la *torsion*; la force, comme la rotation.

Cela posé, énumérons les propositions les plus importantes démontrées par l'auteur.

I. Deux torsions autour de deux vis rectangulaires, prises pour axes des x et des y, se composent en une seule, qui rencontre l'axe des z et lui est perpendiculaire. L'azimut, la distance à l'origine et la hauteur de la vis résultante dépendent du rapport des angles des deux rotations et des hauteurs des torsions données. Si l'on exprime en fonctions de ces mêmes quantités les coordonnées d'un point de la résultante, une élimination facile donne, pour lieu de ces droites, une surface cubique conoïde que l'on nomme le *cylindroïde*, et qui joue un rôle capital dans toute la théorie. Chaque vis génératrice de cette surface a une hauteur déterminée par sa position.

Deux vis A et B déterminent un cylindroïde; en outre elles ont pour résultante une troisième génératrice de la même surface, qui fait avec A et B des angles dont les sinus sont en raison inverse

des rotations effectuées autour de ces vis. Cette loi générale comprend, comme cas particulier, les lois de composition des translations et des rotations.

Les *efforts* se composent exactement comme les *torsions*.

II. *Vis réciproques.* — Si un corps, qui ne peut avoir d'autre mouvement qu'une torsion autour d'une vis A, est maintenu en équilibre par un effort ayant B pour axe, réciproquement tout corps dont le seul mouvement possible est une torsion autour de B peut être tenu en équilibre par un effort autour de A.

Si une vis est réciproque de deux vis données A et B, elle est aussi réciproque de toute autre vis située sur le cylindroïde (A, B).

III. La manière la plus générale de déterminer le degré de *liberté* ou de *restriction* du mouvement d'un corps, c'est de considérer le nombre des vis *indépendantes* autour desquelles il peut se mouvoir. Un corps qui ne peut tourner autour d'aucune vis est fixe, c'est-à-dire qu'il a une liberté nulle; s'il ne peut tourner qu'autour d'une seule vis, il a une liberté du premier degré; s'il peut tourner autour de k vis indépendantes ($k<6$), on démontre qu'il existe une infinité d'autres vis autour desquelles il peut tourner; toutes ces vis forment *un système coordonné de liberté* k.

Toutes les vis réciproques de ce système forment un autre système coordonné de liberté $6-k$.

$k(6-k)$ données sont nécessaires pour déterminer un système de liberté k.

On démontre, en partant du principe des vis réciproques, que la solution d'un problème d'équilibre de degré k entraîne la solution du problème correspondant de degré $6-k$. Il en résulte, par exemple, qu'un corps ayant une liberté du cinquième degré peut tourner autour d'une vis, choisie où l'on voudra dans l'espace, pourvu que cette vis ait une hauteur convenable. Pour qu'un tel corps soit en équilibre, il faut que les forces qui agissent sur lui puissent se réduire à un *effort* autour de la vis réciproque de son propre système de vis coordonnées.

Libertés de degrés II et IV. — Un corps susceptible de tourner autour de deux vis A et B peut tourner autour d'une vis quelconque du cylindroïde (A, B).

Une vis X choisie au hasard dans l'espace coupe en général le cylindroïde en trois points P, Q, R. Si elle est perpendiculaire à la génératrice du point P, on trouve que les deux génératrices des points Q et R ont des hauteurs égales. Donnons à X cette même hauteur prise en sens contraire ; X sera réciproque au cylindroïde.

Les parallèles menées par un point O de l'espace à toutes les vis réciproques d'un cylindroïde forment un cône du second ordre facile à construire. Un corps libre de se mouvoir autour d'une vis quelconque du cylindroïde peut être tenu en équilibre par un effort convenable autour d'une quelconque des vis réciproques.

Les réciproques de ces théorèmes donnent la solution la plus générale du problème de liberté IV. Par exemple, si un corps est libre autour de quatre vis, on peut déterminer un cylindroïde unique réciproque à ce système; ce cylindroïde fait connaître tout le système coordonné des vis données. Le corps ne peut être tenu en équilibre que par un effort autour d'une quelconque des vis du cylindroïde.

Liberté du degré III. — Ce cas offre un intérêt spécial, non-seulement parce que les systèmes direct et réciproque sont du même ordre, mais encore parce qu'il renferme, comme cas particulier, le problème du mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe; mais l'auteur en réserve l'étude pour un Mémoire à part. Il se borne à établir ici que, étant données trois vis quelconques A, B, C, on peut toujours, par un point donné O, faire passer trois vis X_1, X_2, X_3, qui leur soient coordonnées, et trois autres vis Y_1, Y_2, Y_3, qui leur soient réciproques. Les trièdres X_1, X_2, X_3 et Y_1, Y_2, Y_3 sont polaires l'un de l'autre. Une vis de hauteur donnée p, réciproque au système A, B, C, est génératrice d'un certain hyperboloïde. Le second système des génératrices du même hyperboloïde forme l'ensemble des vis réciproques à A, B, C, ayant $-p$ pour hauteur.

La liberté VI peut être regardée comme réciproque de la liberté nulle. Dans ce dernier cas, le corps est fixe et peut être tenu en équilibre par un effort quelconque. Dans le premier cas, le corps peut tourner autour d'une vis quelconque.

IV. *Théorèmes généraux.* — Quelle que soit la nature des liaisons qui restreignent la liberté d'un corps solide, on peut toujours

choisir un système de k vis qui lui laisse exactement la même liberté.

On peut toujours trouver une vis réciproque à cinq vis données dans l'espace. (Ce théorème est d'une extrême importance.)

Sur un cylindroïde donné, il existe toujours une vis Y réciproque d'une vis X donnée dans l'espace.

Étant données sept vis dans l'espace, on peut toujours déterminer sept efforts (ou sept torsions) autour de ces vis, tels que leurs effets sur l'équilibre (ou sur la position) du corps se neutralisent réciproquement. On déduit de là un mode de décomposition d'un effort donné ou d'une torsion donnée en six efforts ou six torsions autour de six vis données.

Quand un corps a k degrés de liberté, son équilibre ne peut être troublé par un effort autour d'une vis du système réciproque. (C'est là peut-être le théorème le plus général qui puisse être énoncé sur l'équilibre d'un corps solide.)

Un corps est en équilibre stable sous l'action de certaines forces ; on lui imprime une torsion autour d'une vis A (*vis de déplacement*) : il en résulte un effort initial autour d'une certaine vis X (*vis de redressement*). Cela posé, soient A et B deux vis de déplacement, X et Y les vis de redressement correspondantes : si A est réciproque à Y, B est réciproque à X. (Important.)

Un corps *libre* est en équilibre stable sous l'action de certaines forces, qui forment un système *conservatif* [1]. On peut choisir d'une infinité de manières un système de six vis $A_1, \ldots, A_6$ tel que la vis de redressement correspondant à l'une d'elles soit réciproque des cinq autres. Ces six vis forment un *système conjugué d'énergie potentielle*.

Réciproques. — Un corps solide sollicité par un effort initial autour d'une vis donnée commence à tourner autour d'une certaine vis instantanée. Cela posé, soient X et Y deux vis d'impulsion, A et B les vis instantanées correspondantes : si A est réciproque à Y, B est réciproque à X.

On peut choisir d'une infinité de manières un système de six vis d'impulsion $X_1, \ldots, X_6$, tel que la vis instantanée correspondant

---

[1] Un système de forces est dit *conservatif* lorsque, pour un déplacement donné, le travail de ces forces est indépendant des chemins suivis par les points d'application.

à l'une d'elles soit réciproque des cinq autres. Ces six vis forment un *système conjugué d'énergie cinétique.*

Dans le cas d'un corps parfaitement libre, on peut choisir un système de six vis qui soient à la fois des vis conjuguées d'énergie potentielle et cinétique. Ces vis sont appelées les *vis normales*. Un corps légèrement écarté d'une position d'équilibre stable, par une torsion autour d'une vis normale, continue à osciller autour de la vis. Tout déplacement initial d'un corps peut se décomposer en six torsions autour des six vis normales, toute vitesse initiale de torsion en six vitesses de torsion, tout mouvement oscillatoire infiniment petit en six oscillations autour des mêmes vis.

En général, quand un corps a k degrés de liberté, ses petites oscillations, dans le voisinage de sa position d'équilibre, se composent de k torsions oscillatoires autour des vis normales.

Telle est, indépendamment de beaucoup d'autres théorèmes moins essentiels, la substance de cet important Mémoire, qui fait faire, comme on le voit, un pas considérable à la théorie du mouvement d'un corps solide. G. L.

PROCEEDINGS OF THE ROYAL IRISH ACADEMY (¹).

T. I; 2e Série (de 1869 à 1872).

N° 2. Séance du 9 janvier 1871.

STONEY (G.-J.). — *Sur la cause de la discontinuité des spectres des gaz.*

Dans un Mémoire précédent, l'auteur a été conduit à chercher cette cause dans les vibrations périodiques qui existent à l'intérieur de chaque molécule, et non dans les mouvements irréguliers des molécules les unes autour des autres.

Aujourd'hui, il essaye de faire un pas en avant dans cette théorie.

Toute oscillation *pendulaire* d'un point peut être représentée par l'équation

$$y = C_0 + C_1 \sin\left(2\pi\frac{t}{\tau} + a\right),$$

(¹) Voir *Bulletin*, t. I, p. 306.

dans laquelle $y - C_0$ exprime l'écart entre la position actuelle du point et sa position initiale, C_1 l'amplitude de l'oscillation, t le temps compté à partir d'une certaine époque, τ la durée d'une oscillation complète, et a une certaine constante qui dépend de la phase de l'oscillation à l'origine du temps.

On ne peut guère admettre que les vibrations imprimées à l'éther par les mouvements périodiques intérieurs d'une molécule de gaz soient représentées par une formule aussi simple. Il y a lieu de supposer, au contraire, qu'elles sont beaucoup plus complexes; mais, quelle que soit cette complexité à l'origine, elle doit se reproduire identiquement par périodes égales, sur toute la longueur du rayon lumineux, tant que le mouvement a lieu dans l'éther, c'est-à-dire dans un milieu où toutes les longueurs d'onde se propagent avec la même vitesse. Cet état de choses change nécessairement dès que l'onde se propage dans un milieu réfringent, tel que le verre.

Supposons l'onde plane dans l'éther. Quelle que soit sa forme, la relation entre le déplacement d'une molécule d'éther et le temps doit être exprimée par une courbe composée de parties qui se répètent indéfiniment. Cette courbe peut être continue ou formée de la superposition de différentes courbes. Prenons le second cas qui comprend le premier : si l'on fait, pour abréger, $x = 2\pi\frac{t}{\tau}$, un des segments de la courbe peut être représenté par les équations

$$y = \varphi_0(x), \quad \text{de} \quad x = 0 \quad \text{à} \quad x = x_1,$$
$$y = \varphi_1(x), \quad \text{de} \quad x = x_1 \quad \text{à} \quad x = x_2,$$

et ainsi de suite jusqu'à

$$y = \varphi_{n-1}(x), \quad \text{de} \quad x = x_{n-1} \quad \text{à} \quad x = 2\pi.$$

En partant de là, on voit facilement, par le théorème de Fourier, que l'équation du mouvement ondulatoire dans l'éther peut s'écrire

$$(1) \qquad y - A_0 = C_1 \sin(x + \alpha_1) + C_2 \sin(2x + \alpha_2) + \ldots.$$

Le premier terme du second membre représente une vibration pendulaire dont τ est la période complète; les termes suivants re-

présentent les harmoniques de cette vibration, de périodes $\frac{\tau}{2}$, $\frac{\tau}{3}$, ... L'ondulation complète peut donc être regardée comme résultant de la superposition d'un certain nombre de vibrations pendulaires dont la principale a τ pour période, tandis que les autres sont ses harmoniques.

Tant que la lumière voyage dans le vide, ces vibrations restent exactement superposées, puisque les ondes se propagent avec la même rapidité, quelle que soit leur période. Mais tout change dès que l'ondulation pénètre dans le verre, puisque là les vibrations composantes, animées de vitesses variables avec leurs périodes, suivent des routes différentes, de sorte que chacune d'elles donne naissance à une raie distincte dans le spectre du gaz.

Un mouvement périodique dans les molécules d'un gaz incandescent peut donc engendrer toute une série de raies. Si quelques termes de la série (1) s'évanouissent, les raies correspondantes disparaissent, et l'on a un spectre interrompu (spectre du premier ordre de Plücker). Les irrégularités apparentes dans les intervalles des raies peuvent tenir à la coexistence de plusieurs mouvements distincts dans les molécules gazeuses ; mais elles peuvent tenir aussi à l'absence d'une partie des raies harmoniques. Quant à celles de ces raies qui subsistent, il n'est pas toujours facile, à cause des lacunes, de trouver leurs dépendances mutuelles, et l'on ne peut y parvenir que dans le cas où les mesures ont été prises avec un soin extraordinaire, comme cela a lieu, par exemple, pour les mesures d'Angström sur le spectre de l'hydrogène.

On sait que ce spectre se compose des trois raies C, F, h, et d'une quatrième raie très-voisine de G. Les trois premières paraissent provenir d'un même mouvement dans les molécules du gaz. En effet, les longueurs d'onde correspondantes, ramenées au vide par la correction de la dispersion dans l'air, sont

$h = 4102,37$ *dixièmes-mètres* (¹),
$F = 4862,11$ »
$C = 6563,93$ »

(¹) Suivant une convention proposée par M. Stoney, et adoptée par l'Association Britannique, un *dixième-mètre* signifie un mètre divisé par 10^{10}; de même, une *quatorzième-seconde* signifie une seconde divisée par 10^{14}, etc., etc.

Or ces nombres sont, à moins d'une unité près du dernier ordre, respectivement égaux à la trente-deuxième, à la vingt-septième et à la vingtième partie du nombre 131277, 14. Ce dernier peut donc être regardé comme exprimant *en dixièmes-mètres* la longueur d'onde fondamentale dont h, F et C seraient trois harmoniques. D'ailleurs la durée correspondante de la vibration est de 4, 4 *quatorzièmes-secondes :* telle serait aussi par conséquent, dans la théorie de M. Stoney, la durée de l'un des mouvements intérieurs des molécules de l'hydrogène.

Au reste, c'est surtout de l'examen des spectres du premier ordre que l'on doit attendre d'importants résultats. On sait que ces spectres sont formés de raies serrées, en bandes juxtaposées rappelant par leur aspect les cannelures d'une colonne. L'auteur regarde comme probable que toute la série de raies qui constituent une de ces cannelures se compose *des harmoniques successifs* de l'un des mouvements particuliers des molécules gazeuses. Il montre même que cette disposition serait une conséquence nécessaire d'une hypothèse convenable faite sur l'ondulation initiale imprimée par le gaz à l'éther. Par exemple, si la loi de cette ondulation était la même que celle du mouvement d'un point voisin de l'extrémité d'une corde de violon, et si la période était suffisamment longue, deux trillionièmes de seconde environ, il en résulterait un spectre formé de raies séparées à peu près par le même intervalle que les deux raies D, et dont les intensités iraient alternativement en croissant et en décroissant sur toute la longueur du spectre, de manière à produire cette apparence cannelée qui distingue les spectres du premier ordre. Chacune des apparences que donne l'observation correspond ainsi à une hypothèse appropriée, et peut-être même serait-il possible de remonter, en partant d'une forme spectrale déterminée, à la nature du mouvement qui lui a donné naissance. Tout au moins doit-il être facile de trouver la période de ce mouvement lorsque le spectre présente une longue succession de séries harmoniques; mais les observations exactes manquent encore. Le seul cas où l'auteur ait pu arriver à un résultat précis est relatif au spectre de l'azote. La plus réfrangible des deux bandes cannelées observées dans ce spectre par Plücker parait due à une vibration fondamentale du gaz ayant une longueur d'onde d'environ 0, 89376 millimètres, ce qui correspond à une période de trois douzièmes-

secondes ; une de ces cannelures se compose des trente-cinq harmoniques comprises entre la 1960e et la 1995e. M. Stoney remarque, en terminant, que ces résultats numériques ne méritent pas autant de confiance que ceux dont il a été question plus haut relativement à l'hydrogène.

Séance du 15 février 1871.

Burton (Ch.-E.). — *Résultats obtenus par la station astronomique d'Agosta (près Syracuse), dans l'observation de l'éclipse totale du* 22 *décembre* 1870.

M Burton se proposait surtout d'observer le spectre de la couronne; aussi employa-t-il la matinée du 22 à la détermination préalable des positions des protubérances à l'aide du spectroscope, afin de s'en écarter, autant que possible, dans l'observation définitive.

Les points est et ouest se trouvaient dégagés. L'observateur résolut en conséquence d'examiner successivement, au moment de la totalité, les points est, ouest, nord et sud, en maintenant la fente du spectroscope dans une direction constante, c'est-à-dire tangentiellement au limbe pour les deux premiers points et normalement pour les deux derniers : il y trouvait l'avantage d'observer ainsi la région inférieure de la couronne à l'est et à l'ouest, tandis qu'au nord et au sud, il pouvait la comparer avec la partie supérieure.

A l'approche de la totalité, le nombre des raies de la chromosphère augmenta dans une énorme proportion. Deux des raies du magnésium au moins étaient renversées. Toutes ces raies étaient penchées du côté le moins réfrangible du spectre, et les plus allongées, celles de l'hydrogène, se divisaient même comme des branches d'arbre vers leur extrémité supérieure, ce qui dénotait une violente agitation dans les couches élevées de la chromosphère.

Lorsque le disque du Soleil fut complétement obscurci, M. Burton put apercevoir une faible raie brillante, ou plutôt simplement *positive,* se détachant sur le spectre continu. L'obscurité inattendue du champ n'ayant pas permis de mesures directes, l'observateur n'a pu fixer la position de cette raie que par souvenir : il estime

qu'elle est un peu moins réfrangible que la raie E. L'observation dut s'arrêter là, par suite de l'interposition d'un nuage [1].

N° 4. — Séance du 26 juin 1871.

STONEY (G.-J.). — *Sur une nouvelle forme de spectroscope.*

Si l'on désigne par θ la déviation minimum d'un rayon dans un prisme ou dans une suite de prismes, et par i l'inverse de la longueur d'onde,

$$\delta = \frac{d\theta}{di}$$

peut être pris pour mesure de la dispersion. Il faut rapporter ces données à un rayon déterminé, choisi vers le milieu du spectre, par exemple celui dont la longueur d'onde est 5000 *dixièmes-mètres.*

Mais la dispersion du spectroscope est plus considérable; elle est égale à la précédente multipliée par le grossissement de la lunette. Ce grossissement dépend de l'oculaire; mais on peut regarder comme dispersion *normale* celle qui correspond à l'emploi du plus fort oculaire dont on puisse faire usage sans perte de lumière. Il est facile de voir que cette dispersion a pour mesure

$$\Delta = \frac{a}{\alpha}\,\delta,$$

a étant l'ouverture du spectroscope, c'est-à-dire le diamètre du pinceau lumineux qui passe à travers le prisme et les deux objectifs, et α le diamètre de la pupille (2 millimètres environ).

De là deux moyens d'augmenter la dispersion :

1° Accroître le nombre de prismes, ce qui accroît δ;

2° Agrandir leurs dimensions, ce qui augmente a.

Le second de ces moyens est préférable, suivant l'auteur, non-seulement parce qu'il y a moins de réflexions successives, mais

---

(1) On sait que les observations faites par M. Janssen, pendant l'éclipse du 12 décembre 1871, ont précisé ces résultats. Le spectre brillant de la couronne se compose des raies de l'hydrogène et d'une raie verte dont on cherche encore la vraie signification.

surtout parce que le travail optique est ainsi transporté des prismes aux lentilles, instruments beaucoup plus parfaits.

En se fondant sur ces considérations, M. Stoney propose l'emploi d'un nouveau spectroscope dans lequel l'objectif serait remplacé par un miroir qui servirait à la fois de télescope et de collimateur. Il serait bien difficile de donner une idée nette de l'appareil sans le secours d'une figure. Disons seulement que le rayon lumineux, renvoyé par un prisme sur le miroir du télescope, revient sur ses pas pour se disperser dans un demi-prisme de sulfure de carbone, est réfléchi de nouveau vers le miroir, et parcourt une quatrième fois le tube télescopique avant d'arriver à l'oculaire. On gagne ainsi sous le rapport de l'économie, et plus encore sous le rapport du poids et de la simplicité de l'appareil.

N° 5. — Séance du 11 décembre 1871.

Ball (R.-St.). — *Notes de Mécanique appliquée.*

I. *Mouvements parallèles.* — L'auteur démontre par de très-simples considérations géométriques le théorème suivant :

Lorsqu'une figure plane se meut dans son plan suivant une loi quelconque, il y a toujours deux points du plan tels, que quatre positions consécutives de chacun d'eux sont en ligne droite.

II. *Contact des cames.* — L'auteur donne des démonstrations simples de quelques théorèmes, déjà connus pour la plupart, sur le contact des cames.

Séance du 24 juin 1872.

Ball (R.-St.). — *Sur une nouvelle approximation de l'orbite de l'étoile double ξ de la Grande Ourse.*

On a quatre déterminations des éléments de cette orbite : celles de Savary, de Herschel II, de Mädler et de Villarceau. La période est probablement un peu inférieure à 60 ans, de sorte que, depuis la première observation (Herschel I, 1781), le compagnon a accompli environ une révolution et demie. Il a passé au périastre entre le printemps de 1816 et celui de 1817. Or on ne possède aucune observation du groupe entre 1804 et 1819, et cependant c'est là l'intervalle le plus important ; car, pendant cet intervalle,

l'angle de position a changé de plus de 168 degrés : aussi y a-t-il quelque désaccord entre les calculateurs. Le prochain passage au périastre devant avoir lieu en 1876, M. Ball s'est proposé de déterminer les véritables éléments, à l'aide des nombreuses observations faites depuis quelques années.

La dernière de ces observations (Brünnow) est de 1872,28. Elle est à peu près représentée dans l'orbite de Savary; mais, dans les orbites de Herschel, de Mädler et de Villarceau, les écarts sont respectivement de 17°,43, 33° et 37°,91. Ces écarts énormes tiennent, il est vrai, à la rapidité du mouvement angulaire actuel; mais ils rendent inacceptables les orbites de Mädler et de Villarceau, bien que ces orbites représentent mieux les observations anciennes que celle de Savary.

Pour déterminer les éléments les plus probables, M. Ball a suivi la méthode d'Herschel, dont il donne le détail. Sur un papier quadrillé, où le temps est compté sur les abscisses et l'angle de position sur les ordonnées, l'auteur reporte toutes les observations connues, au nombre de 64, et il trace la courbe qui se rapproche le plus de tous les points ainsi obtenus. Il déduit ensuite, par interpolation, de cette courbe 19 valeurs probables de l'angle de position, régulièrement espacées de cinq en cinq ans. Les tangentes à la courbe donnent les valeurs correspondantes de $\frac{dt}{d\theta}$, valeurs dont les racines sont proportionnelles aux distances r des deux composantes, car la loi des aires est vraie pour l'ellipse projetée comme pour l'ellipse réelle.

Cela fait, si, sur un second dessin, on porte, à partir d'un point fixe S, et aux intervalles angulaires voulus, les distances correspondantes *calculées à l'aide de la courbe,* on obtient les positions apparentes du compagnon, et l'ellipse qui s'écarte le moins possible de toutes ces positions est l'orbite projetée la plus probable. Reste à en déduire l'orbite réelle.

Généralement, le point S n'est pas le foyer de l'ellipse projetée; mais il est la projection du foyer de l'ellipse réelle. Le grand axe de cette dernière se projette donc sur le diamètre de l'ellipse projetée qui passe par le point S; dès lors, une simple mesure donne immédiatement l'excentricité. Des considérations trigonométriques très-simples font connaître successivement :

L'inclinaison mutuelle γ des plans des deux ellipses ;

L'angle Ω qui fait l'intersection de ces deux plans avec la ligne fixe menée par S, à partir de laquelle se comptent les angles de position ;

L'angle λ compté de cette ligne au grand axe de l'orbite vraie, sur le plan de cette orbite ;

Le moyen mouvement n ;

L'époque ε du passage au périastre ;

La période T de la révolution.

Enfin on arrive facilement à l'expression du grand axe en secondes, en ramenant sa mesure à celle de sa projection. Mais, pour convertir les millimètres en secondes, il faut avoir soin de comparer la *somme* des distances *observées* (exprimée en secondes) à la *somme* des distances *mesurées* (exprimée en millimètres).

Telle est la méthode dont l'auteur a déduit les éléments suivants :

ε	1816,405
T (en années)	59,88
Ω	103°,6
γ	53°,1
λ	135°,3
e	0,3786
a	2″,591
n	6°,012

Les comparaisons entre les résultats du calcul et ceux de l'observation sont satisfaisantes, y compris l'observation de Brünnow ; mais, comme nous nous trouvons actuellement dans la période critique, M. Ball donne une éphéméride qui s'étend jusqu'à 1879 ; de nouvelles vérifications sont d'autant plus indispensables, que l'orbite de M. Ball présente d'assez grandes discordances, non-seulement avec celles dont nous avons parlé plus haut, mais aussi avec l'orbite récemment calculée par M. Hind, et dont on trouvera les éléments à la page 309 du 6e volume de ce Bulletin.

G.-L.

BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE SAINT-PÉTERSBOURG (¹).

T. XVIII; 1872-1873.

MIDDENDORF (A.-Th. v.). — *Quelques nouvelles observations servant à la connaissance du courant du Cap Nord.* (5 col.; all.)

LINDEMANN (Ed.). — *Résultats provisoires d'observations photométriques faites à Poulkova.* (4 col.; all.)

GLASENAPP (M.-S.). — *Observations des satellites de Jupiter.* (12 col.)

L'auteur s'est occupé de l'observation des éclipses des satellites, en s'appuyant sur les considérations développées par Bailly, au siècle dernier, relativement à l'exactitude que l'on peut atteindre dans ces observations. Il faut tenir compte de l'avance ou du retard apparent dû à la variation de l'éclat de ces astres avec leur distance à l'observateur.

SOMOF (J.). — *Sur les vitesses virtuelles d'une figure invariable, assujetties à des conditions quelconques de forme linéaire.* (23 col.)

« M. Mannheim, dans son Mémoire intitulé *Étude sur le déplacement d'une figure de forme invariable* (²), en s'appuyant sur des théorèmes donnés par M. Chasles, a trouvé, par une voie purement géométrique, diverses propriétés intéressantes des déplacements infiniment petits ou des vitesses virtuelles d'une figure invariable, en admettant que ces déplacements soient assujettis à des conditions descriptives, capables d'être réduites à une ou à plusieurs conditions simples, savoir : « qu'un point de la figure doit se déplacer sur une surface immobile ». Or cette condition n'est pas la plus générale : elle n'est qu'un cas particulier d'une autre, qui peut être exprimée par une équation quelconque de forme linéaire, homogène par rapport aux projections sur trois axes, de la vitesse

---

(¹) Voir *Bulletin*, t. VI, p. 32.

(²) Voir *Bulletin*, t. I, p. 297.

de translation et de la vitesse angulaire de rotation portée sur l'axe instantané, correspondant à un mouvement quelconque que peut avoir la figure invariable.

» Dans le présent Mémoire, l'auteur donne un moyen analytique pour déterminer les vitesses virtuelles d'une figure invariable, en supposant que ces vitesses doivent satisfaire à des équations de condition de la forme générale que l'on vient de citer. Il prend en même temps en considération les propriétés des complexes linéaires de Plücker, auxquels les vitesses virtuelles d'une figure invariable sont intimement liées. »

Somof (J.). — *Note relative au moyen employé par Gauss, dans la méthode des moindres carrés, pour réduire une fonction homogène quadratique à une somme de carrés.*

Étant donnée une fonction quadratique homogène de m variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$,

$$T = \sum a_{rs} x_r x_s, \quad (r, s = 1, 2, \ldots, m),$$

où $a_{rs} = a_{sr}$, on se propose de la réduire à la forme

$$T = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_m^2,$$

$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ étant des fonctions linéaires de la forme

$$\xi_r = \sum_{s=r}^{s=m} b_{rs} x_s.$$

Il s'agit de calculer les coefficients b_{rs}, ce que fait l'auteur à l'aide des déterminants. Il retrouve ainsi, par une voie plus simple, les formules de Gauss.

Asten (E.). — *Sur la seconde apparition de la comète de Tempel (comète 1867, II).* (7 col.; all.)

Struve (O.). — *Observation de Procyon comme étoile double.* (5 col.; all.)

Wild (H.). — *Méthode de F.-E. Neumann, pour éviter l'erreur provenant des flexions des barres employées comme trait.* (5 col.; all.)

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Argand (R.). — Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques. 2e édition, précédée d'une *Préface* par M. Hoüel, et suivie d'un *Appendice* contenant des Extraits des *Annales de Gergonne*. — Paris, Gauthier-Villars; 1874. 1 vol. petit in-8°. 5 fr.

Dölp (H.). — Aufgaben zur Differential- und Integralrechnung. 2. Aufl. — Giessen, Ricker; 1874. In-8°. 1 Thlr.

Geiser (C.-F.). — Zur Erinnerung an *Jacob Steiner*. — Zürich, Schabelitz. $\frac{1}{3}$ Thlr.

Hankel (H.). — Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter. — Leipzig, Teubner; 1874. 2 Thlr. 12 Ngr.

Hesse (O.). — Sieben Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte. Fortsetzung der Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der geraden Linie, des Punktes und des Kreises. — Leipzig, Teubner, II-52 S. 1 Mk. 60 Pf.

Hoefer (F.). — Histoire de l'Astronomie, depuis ses origines jusqu'à nos jours. — Paris, Hachette; 1873. 1 vol. in-12, 631 p. 4 fr.

— Histoire de la Physique et de la Chimie, depuis les temps les plus reculés jusqu'à nos jours. — Paris, Hachette; 1872. 1 vol. in-12, 561 p. 4 fr.

— Histoire des Mathématiques, depuis leurs origines jusqu'au commencement du xixe siècle. — Paris, Hachette; 1874. 1 vol. in-12, 602 p. 4 fr.

Kirchhoff (G.). — Vorlesungen über mathematische Physik. Mechanik. 1. und 2. Lieferung. — Leipzig, Teubner; 1874. 3 Thlr.

Königsberger (L.). — Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen. — Leipzig, Teubner; 1874. 2 vol. in-8°. 5 Thlr.

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

BRIOT et BOUQUET, professeurs à la Faculté des Sciences. — Théorie des Fonctions elliptiques. 2e édition. Deuxième et troisième fascicule. In-4°, 691 p. — Paris, Gauthier-Villars. — Prix de l'Ouvrage complet : 30 fr.

Nous avons rendu compte (t. VI, p. 65, de ce *Bulletin*) du premier fascicule de cet Ouvrage. Les deux Parties que nous annonçons aujourd'hui complètent et terminent la deuxième édition. Elles comprennent les Livres VI-IX. Nous allons rapidement rendre compte du contenu de ces derniers Livres.

Le Livre VI est intitulé : *Développement des fonctions elliptiques.* Le Chapitre Ier de ce Livre traite des *intégrales elliptiques.* Les auteurs font d'abord connaître la belle méthode de transformation que Jacobi a donnée dans les *Fundamenta nova,* en 1829. Ils développent les calculs pour les transformations du premier et du second degré, et montrent comment on peut utiliser ces transformations pour ramener l'intégrale à la forme canonique de Jacobi. Ils examinent ensuite les intégrales des fonctions rationnelles de la variable et de la racine carrée d'un polynôme du quatrième degré, et ils sont ainsi conduits aux intégrales de première, de deuxième et de troisième espèce. Ils donnent l'expression des intégrales de deuxième et de troisième espèce au moyen de la transcendante θ, le théorème relatif à l'échange du paramètre et de l'argument, etc.

Le Chapitre II est consacré au développement des fonctions elliptiques en séries entières. Il contient l'exposition de la belle méthode de M. Hermite, pour la détermination directe des coefficients de ces séries, et l'étude des fonctions Al de M. Weierstrass.

Le Chapitre III traite du développement en séries trigonométriques, développement qui, comme on sait, est beaucoup plus simple que le précédent. Ce Chapitre termine le Livre VI.

Le Livre VII est intitulé : *Addition, multiplication et division des arguments dans les fonctions elliptiques.* Le Chapitre Ier contient les formules fondamentales relatives à l'addition des arguments dans les fonctions θ, ainsi que l'application qu'a faite M. Rosenhain de ces formules à la solution d'une belle question de Calcul intégral. Le Chapitre II contient l'application des mêmes

formules à l'étude de l'addition des arguments dans les fonctions elliptiques. Cette étude est ensuite reprise au moyen de la belle méthode que M. Liouville a donnée dans son enseignement. L'addition des arguments dans les intégrales de deuxième espèce, des arguments et des paramètres dans celles de troisième espèce, vient terminer ce Chapitre. Les suivants sont consacrés à la multiplication de l'argument, traitée successivement par les méthodes d'Abel et de Jacobi, à la division de l'une quelconque des périodes par un nombre pair ou impair, etc. Le Chapitre V traite de la division de l'argument et de la résolution algébrique des équations qui se rencontrent dans cette théorie.

Le Livre VIII est intitulé : *Transformation*. Le Chapitre Ier commence par l'étude du problème pris avec toute la généralité qu'Abel lui a donnée. Le Chapitre II traite des équations modulaires, de leurs propriétés, de leur formation, de leurs racines, des équations différentielles relatives à la transformation, des transformations du troisième, du cinquième et du septième degré, de l'équation différentielle entre les modules.

Le Chapitre III contient la résolution de l'équation du cinquième degré par les fonctions elliptiques, telle que M. Hermite l'a obtenue par la considération de l'équation modulaire.

Le Livre IX traite du célèbre théorème d'Abel. Le Chapitre Ier est consacré à la définition des intégrales abéliennes de première, de deuxième et de troisième espèce. Les auteurs appliquent la théorie générale aux intégrales ultra-elliptiques. Le Chapitre II traite des relations entre les périodes de deux intégrales abéliennes. Enfin le Chapitre III est consacré à une définition et à une démonstration précise du célèbre théorème d'Abel. Dans cette partie de l'Ouvrage, qui sera, nous l'espérons, une introduction à un nouveau volume, les auteurs se sont inspirés, comme ils le déclarent, du bel Ouvrage de Clebsch.

Tel est le résumé, bien court, des matières contenues dans cet important Ouvrage. La notion de la double périodicité manque au beau Traité de l'illustre Legendre. Elle fait, au contraire, la base de l'œuvre nouvelle de MM. Briot et Bouquet.

La netteté et la clarté des démonstrations sont parfaites. Les auteurs donnent quelques indications, un peu sobres peut-être, sur l'historique des différentes questions. Dans une Préface modeste,

ils rendent un juste hommage aux travaux de leurs devanciers, de Cauchy, de MM. Liouville et Hermite.

La part qui leur revient, surtout dans la création de ces belles découvertes, est, on le sait, l'étude des fonctions définies par des équations différentielles. Nous nous rappellerons toujours le jugement qu'en portait M. Bertrand, quand, à l'École Normale, il nous engageait à étudier ces importantes recherches, les considérant comme l'une des plus belles découvertes faites dans le Calcul intégral depuis Euler. Chaque année, dans son cours à l'École Polytechnique, M. Hermite les signale aussi à ses élèves comme devant être rangées parmi les plus beaux travaux de notre époque. Que pourrait ajouter un élève à l'opinion de maîtres aussi éminents? G. D.

BACHET (Claude-Gaspar), sieur de Méziriac. — PROBLÈMES PLAISANTS ET DÉLECTABLES QUI SE FONT PAR LES NOMBRES. 3e édition, revue, simplifiée et augmentée par A. LABOSNE, professeur de Mathématiques. — Paris, Gauthier-Villars, libraire-éditeur; 1874. Prix : 6 fr.

Si le nouvel éditeur de cet Ouvrage a rendu au public un service incontestable, il est toutefois une classe de personnes auxquelles cette publication sera peut-être désagréable. Depuis longtemps le Livre de Bachet était devenu fort rare, et la découverte d'un exemplaire de cet Ouvrage était, pour un bibliophile, un véritable succès; car il pouvait se vanter alors d'avoir conquis un Ouvrage d'une réputation universelle, mais dont la possession était réservée à un petit nombre d'amateurs. Maintenant tout le monde pourra lire et se procurer, à un prix très-modique, les *Problèmes délectables,* dans la nouvelle édition que nous devons à M. Labosne.

C'est en 1612 que Bachet publia la première édition de ses problèmes. Dans la Préface de la seconde édition, parue en 1624, il indique, dans un langage naïf, le but qu'il espérait atteindre : « Il y a onze ans », dit-il, « que ce Liure fut premierement imprimé, et que ie voulus qu'il sortist en lumiere, tant pour faire un essai de mes forces que pour fonder quel iugement on feroit de mes Œuures, et à fin qu'il seruist comme d'auan-coureur à mon Diophante. »

L'Ouvrage était divisé en deux Parties. Une introduction de 53 pages était consacrée aux propriétés des nombres utiles pour la

solution des *problèmes*. Elle contient quelques théorèmes, donnés aujourd'hui dans toutes les Arithmétiques et les éléments de l'Analyse indéterminée, tels que pouvait les exposer à cette époque le commentateur de Diophante. Venaient ensuite (p. 53-198) les problèmes, au nombre de vingt-cinq, presque tous résolus en plusieurs manières différentes.

Enfin une troisième Partie, intitulée : « S'ensuiuent quelques autres petites subtilitez des nombres, qu'on propose ordinairement (p. 193-247) », contenait d'autres problèmes au nombre de dix, dont la solution dépend en général de l'Analyse indéterminée du premier degré. La deuxième édition était un élégant in-8° de la dimension d'un in-12 moderne. Elle contenait une dédicace au comte de Tournon, deux sonnets en l'honneur de Bachet, une pièce en vers latins qu'on a supprimée dans la nouvelle édition, et enfin la Préface au lecteur, dont nous avons donné un passage. L'éditeur était « Pierre Rigaud et associez, ruë Mercure, au coing de la ruë Ferrandiere, à l'enseigne de la Fortune, à Lyon. » Quant au style, il est fort bon et fort élégant, et M. Labosne eût mieux fait de n'y rien changer.

La nouvelle édition ne se recommande pas par de moindres mérites. Les éditeurs ont choisi l'in-8° comme pour l'ancienne; mais cet in-8° se rapproche par les dimensions d'un in-4° plutôt que d'un in-12. L'impression fait le plus grand honneur à M. Gauthier-Villars.

Quant aux modifications que M. Labosne a fait subir au Livre de Bachet, quelques-unes sont à regretter; d'autres, au contraire, sont justifiées et augmentent la valeur de la nouvelle édition.

Nous approuvons la suppression de la partie arithmétique du Livre de Bachet; cette portion de l'Ouvrage était devenue tout à fait inutile. Quant au reste de l'Ouvrage, il est presque tout entier conservé; seulement l'orthographe a été changée, bien des passages ont été remplacés par des explications de M. Labosne, que nous aurions préféré ne pas voir mêlées au français si élégant de Bachet. Voilà pour la critique; mais plusieurs additions, des solutions complémentaires de différents problèmes font réellement honneur à l'éditeur et seront lues avec profit. Citons en particulier l'addition au problème des *carrés magiques*, très-incomplétement et très-inexactement traité par Bachet.

Enfin on a ajouté en supplément quinze problèmes réellement intéressants, dont la solution témoigne de la parfaite compétence de M. Labosne, et qui figurent d'une manière fort honorable à côté de ceux de Bachet.

Quatre Notes d'Arithmétique remplacent l'Introduction de Bachet et terminent l'Ouvrage.

Le nouvel éditeur, on le voit, n'a pas suivi la méthode des commentateurs modernes; loin de regarder comme sacré le texte de son auteur et de s'abstenir de lui faire subir le moindre changement, il l'a profondément modifié, changeant l'orthographe, supprimant certains passages, en ajoutant d'autres. Nous le regrettons; mais nous devons reconnaître que les additions faites à l'Ouvrage ont une réelle valeur, et que la nouvelle édition mérite de prendre place dans les bibliothèques, à côté des précédentes. G. D.

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

T. LXXIX, 2e semestre 1874.

N° 1. Séance du 6 juillet 1874.

Janssen (J.). — *Présentation d'un spécimen de photographies d'un passage artificiel de Vénus, obtenu avec le* revolver photographique.

Laussedat. — *Sur l'appareil photographique adopté par la Commission du passage de Vénus. Réclamation de priorité.*

Spottiswoode (W.). — *Sur les surfaces osculatrices.*

L'auteur se propose de chercher les conditions pour qu'il soit possible de faire passer par plusieurs points de l'espace une surface quadrique qui soit ou tangente, ou osculatrice en ces points à une surface donnée d'ordre quelconque.

Catalan (E.). — *Note sur les surfaces homofocales.*

Voici le problème que M. Catalan s'est proposé de résoudre :

1° reconnaître si les surfaces S, représentées par $F(x, y, z) = c$, appartiennent à un système orthogonal triple; 2° trouver, si elles existent, les surfaces Σ_1, Σ_2 qui, avec les surfaces S, constituent ce système.

Aoust. — *Réponse aux observations de M. Combescure.*

Tacchini. — *Sur la formation des taches solaires.*

N° 2. Séance du 13 juillet 1874.

Faye. — *Observations au sujet de la dernière Note de M. Tacchini et du récent Mémoire de M. Langley.*

Léauté. — *Sur quelques applications aux courbes du second ordre du théorème d'Abel, relatif aux fonctions elliptiques.*

Il s'agit du théorème suivant : « La somme des intégrales de première espèce $\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$, relative aux points d'intersection de la courbe $y^2 = (1-x^2)(1-k^2x^2)$ avec une courbe algébrique $f(x, y) = 0$, est constante tant que cette courbe conserve le même degré. » L'auteur transforme cet énoncé en considérant la courbe du quatrième ordre comme la perspective de l'intersection de deux surfaces du second ordre.

Lucas (F.). — *Note relative au viriel de M. Clausius.*

Spottiswoode (W.). — *Note relative à la théorie des surfaces osculatrices.*

M. Spottiswoode déduit plusieurs conséquences géométriques des considérations qui ont fait le sujet de sa Communication précédente.

N° 3. Séance du 20 juillet 1874.

Bertrand (J.). — *Note sur l'action de deux éléments de courant.*

Deux éléments de courant sont dits *de même sens* quand ils s'éloignent tous deux du pied de la perpendiculaire commune ou quand ils s'en approchent l'un et l'autre ; M. Bertrand pense qu'il n'est plus exact de dire, en adoptant ce langage, que deux éléments

de même sens s'attirent, et que cette assertion est en désaccord avec la loi même d'Ampère.

N° 4. Séance du 27 juillet 1874.

STEPHAN. — *Découverte et observations d'une comète par M. Borrelly, à l'Observatoire de Marseille.*

N° 5. Séance du 3 août 1874.

FAYE. — *Double série de dessins représentant les trombes terrestres et les taches solaires, exécutés par M. Faye.*

SECCHI (le P.). — *Observations faites pendant les derniers jours de l'apparition de la comète Coggia.*

KRETZ. — *Indication d'une méthode pour établir les propriétés de l'éther.*

BARTHÉLEMY. — *Note sur la stratification de la queue de la comète Coggia.*

N° 6. Séance du 10 août 1874.

BERTRAND (J.). — *Sur un nouveau Mémoire de M. Helmholtz.*

Dans une Note, présentée le 10 novembre 1873, et intitulée : *Examen de la loi proposée par M. Helmholtz pour représenter l'action de deux éléments de courant,* M. Bertrand signalait une erreur commise par M. Helmholtz dans l'application de la loi qu'il propose, et montrait que les résultats obtenus par l'auteur ne s'accordent nullement avec la règle qu'il a cru devoir poser. Dans un Mémoire publié dans le *Journal de Borchardt,* M. Helmholtz répond aux critiques qui lui ont été faites; M. Bertrand montre, dans la Note actuelle, que ses dernières objections ne sont nullement affaiblies par les réponses de M. Helmholtz.

BAILLOT. — *Observations de la comète Coggia (comète III, 1874), faites à l'équatorial Secrétan-Eichens.*

WOLF (C.). — *Observations de la comète de Borrelly (comète IV, 1874), faites à l'équatorial Secrétan-Eichens.*

N° 7. Séance du 17 août 1874.

Resal (H.). — *Théorie de la transmission du mouvement par câbles.*

Après avoir montré tout l'intérêt qui s'attache à la transmission par câbles, et constaté qu'on ne possédait sur ce sujet que quelques règles pratiques dues à M. Hirn, et quelques formules de M. Reulaux, qu'il paraît assez difficile de justifier, M. Resal démontre que, lorsque le mouvement permanent est établi, la forme de chacun des brins d'un câble (abstraction faite des faibles oscillations dues à l'élasticité et à des causes d'un ordre secondaire) est une chaînette dont le paramètre est indépendant de sa vitesse. L'expression de la tension renferme un terme proportionnel au carré de la vitesse, qui n'est pas toujours négligeable. La théorie de la transmission par câbles présente de grandes difficultés; mais, en employant un choix convenable de variables, M. Resal parvient aisément à la démonstration des propriétés qui ont été énoncées plus haut.

Heis. — *Sur la comète de Coggia.*

Fouret. — *Sur certains groupes de surfaces algébriques ou transcendantes, définis par deux caractéristiques.*

La Note actuelle indique l'extension à la Géométrie de l'espace des considérations qu'il avait exposées précédemment sur les systèmes généraux de courbes.

N° 8. Séance du 24 août 1874.

Sarrau. — *Recherches sur les effets de la poudre dans les armes à feu.*

Ce Mémoire a pour objet la détermination théorique du mouvement d'un projectile dans l'intérieur d'une arme à feu; l'auteur prend pour bases de son travail les lois, aujourd'hui bien connues, qui régissent la transformation de la chaleur en travail dans les machines thermiques; il fait remarquer que cette importante modification des bases de la théorie a été introduite par M. Resal dans ses *Recherches sur le mouvement des projectiles.*

Laguerre. — *Sur une formule nouvelle permettant d'obtenir, par approximations successives, les racines d'une équation dont toutes les racines sont réelles.*

Gruey. — *Observations des Perséides, faites à l'Observatoire de Toulouse, les* 5, 7, 8, 9 *août* 1874.

Chapelas. — *Observations, faites à Paris, des étoiles filantes du mois d'août* 1874; *marche du phénomène depuis* 1837 *jusqu'à* 1874.

L'auteur représente par une courbe la marche du phénomène.

N° 9. Séance du 31 août 1874.

Faye. — *A la Société des Spectroscopistes italiens.*

Barthélemy. — *Nouvelle Note sur la queue de la comète Coggia.*

Virlet d'Aoust. — *Sur une nouvelle théorie de la formation des comètes et de leurs queues.*

N° 10. Séance du 7 septembre 1874.

Léauté. — *Sur quelques applications aux courbes du second degré du théorème d'Abel, relatif aux fonctions elliptiques.* (Suite.)

L'auteur s'est proposé de trouver les coordonnées d'un point d'une certaine conique au moyen du sinus de l'amplitude de l'intégrale elliptique relative à ce point; il conclut de là plusieurs relations déjà connues.

N° 11. Séance du 14 septembre 1874.

Allégret. — *Sur une transformation des équations de la Mécanique.*

M. Allégret résume en ces termes l'objet de sa Note : « Jacobi a fait connaître, en 1842, dans son beau Mémoire *Sur l'élimination des nœuds dans le Problème des trois Corps,* une méthode par laquelle le mouvement de n corps qui s'attirent mutuellement peut être ramené à celui de $n-1$ corps. Ces derniers sont alors sollicités par de nouvelles forces dont les composantes, suivant trois axes fixes rectangulaires, sont égales aux dérivées partielles d'une même fonction, et le principe des aires, de même que celui des forces vives, subsiste dans le mouvement fictif considéré. Le but de cette Note est de montrer qu'on peut effectuer une telle trans-

formation au moyen de formules très-simples, qui ne laissent lieu à aucune indétermination, et dont l'application à la Mécanique céleste présente la plus grande facilité. »

N° 12. Séance du 21 septembre 1874.

FOURET. — *Propriétés des implexes de surfaces, définis par deux caractéristiques.*

M. Fouret énonce un certain nombre de propriétés relatives aux systèmes de surfaces qu'il a définis dans une Note précédente et qu'il nomme *implexes de surfaces.*

N° 13. Séance du 28 septembre 1874.

N° 14. Séance du 5 octobre 1874.

RESAL (H.). — *Recherches sur les conditions de résistance des chaudières cylindriques.*

En partant des hypothèses admises dans la théorie de la résistance des matériaux, M. Resal se trouve conduit aux résultats suivants : pour des rayons donnés du corps cylindrique et des fonds, l'angle au centre de la section méridienne de chaque fond et le rayon de la surface canal qui se raccorde avec le cylindre ont des valeurs complétement déterminées; la compensation est impossible lorsque le rapport des rayons du fond et du corps cylindrique dépasse 1,40.

RICQ. — *Sur un enregistreur à indications continues, pour la détermination de la loi de variation des pressions produites par les gaz de la poudre.*

JORDAN (C.). — *Sur la théorie des courbes dans l'espace à n dimensions.*

Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les coordonnées d'un point dans l'espace à n dimensions, M. Jordan définit une courbe par les équations

$$x_1 = f_1(s),\ x_2 = f_2(s), \ldots,\quad x_n = f_n(s),$$

où s est une variable indépendante. Il est difficile de résumer en un petit nombre de lignes les résultats obtenus par M. Jordan; mais on peut pressentir que les notions intuitives de l'espace à trois di-

mensions doivent conduire à des relations invariantes remarquables concernant des fonctions d'un nombre quelconque de variables : il peut donc y avoir dans cette idée une source féconde de beaux résultats algébriques.

SITZUNGSBERICHTE DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU WIEN. Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe [1].

T. LXI (fin); février-juin 1870.

WEYR (Em.). — *Sur les faisceaux de courbes.* (7 p.)

Ce Mémoire contient, entre autres, une démonstration de ce théorème : que, dans un faisceau de courbes du $n^{\text{ième}}$ ordre, il y a, au plus, $3(n-1)^2$ points doubles, démonstration différente de celles que l'on présente ordinairement. En outre, l'auteur y démontre d'autres théorèmes, les uns nouveaux, les autres déjà connus. Il prend pour base de ses considérations les courbes du $(n-1)^{\text{ième}}$ ordre, que l'on obtient comme lieux des points de contact des tangentes, menées des points du plan aux courbes du faisceau (plan).

STERN. — *Contributions à la théorie du bruit* (non musical), *comme symptôme, au point de vue des besoins spéciaux de la diagnostique médicale.* (51 p.)

LITTROW (K. v.). — *Supplément au Mémoire intitulé : « Dénombrement des étoiles boréales du Catalogue de Bonn, d'après leurs grandeurs. »* (4 p.)

LANG (V. v.). — *Sur une nouvelle méthode pour l'étude de la diffusion des gaz.* (11 p.)

PUSCHL (K.). — *Sur une attraction cosmique, que le Soleil exerce par ses rayons.* (20 p.)

Considérations sur l'équivalent mécanique d'un faisceau de rayons solaires. — Intensité des rayons solaires dans l'hypothèse de l'émission; leur action est une pression. — Intensité des rayons

---

(1) Voir *Bulletin*, t. VII, p. 138.

solaires dans l'hypothèse ondulatoire; leur action est une attraction. — Calcul de l'intensité attractive des rayons solaires; rapport de grandeur entre l'attraction thermique et l'attraction newtonienne. L'auteur trouve que la seconde est environ 16×10^{12} fois plus grande que la première pour la Terre. — Attraction thermique du Soleil sur de très-petites masses cosmiques; diminution du temps de la révolution des comètes. — L'auteur conclut de son travail que, entre les corps cosmiques assez petits, l'attraction mutuelle qu'ils exercent par leurs surfaces rayonnantes peut devenir une force prépondérante par rapport à leur gravitation mutuelle.

STERN. — *Sur la résonnance de l'air dans l'espace libre.* (23 p.)

LOSCHMIDT (J.). — *Recherches expérimentales sur la diffusion des gaz, en l'absence de cloison poreuse.* (14 p.)

NIEMTSCHIK (R.). — *Constructions simples de l'hyperboloïde et du paraboloïde gauches, ainsi que de leurs sections planes et de leurs ombres portées.* (12 p., 1 pl.)

Dans ce long travail, l'auteur expose diverses constructions de l'hyperboloïde à une nappe et du paraboloïde hyperbolique, ainsi que les constructions de leurs sections planes et de leurs cônes circonscrits. Il nous semble que la Science n'a pas grand profit à tirer de ces développements; à coup sûr l'auteur n'y fait pas preuve de connaissances bien parfaites sur l'état actuel de la Géométrie en général et de la théorie des surfaces du second degré en particulier.

UNFERDINGER (Fr.). — *Transformation et détermination de l'intégrale triple*

$$\int\int\int F\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2},\ \alpha x+\beta y+\gamma z\right)dx\,dy\,dz.$$

(24 p.)

M. Unferdinger a traité, dans ce même volume, un cas analogue ([1]).

STEFAN (M.-J.). — *Sur la production de vibrations longitudinales dans l'air par des vibrations transversales.* (8 p.)

([1]) Voir *Bulletin*, t. VII, p. 141.

Oppolzer (Th. v.). — *Sur le passage de Vénus de l'année* 1874. (85 p.)

Éphémérides des lieux du Soleil et de Vénus. — Développement de l'influence de la parallaxe sur les coordonnées relatives du Soleil et de Vénus. — Mesures à l'héliomètre (avec trois Tables). — Reproduction photographique. — Observation des différences d'ascension droite. — Observation des moments du contact, d'après la méthode de Delisle (avec quatre Tables). — Observation des moments du contact, d'après la méthode de Halley. — Angles de position de l'entrée et de la sortie.

Weyr (Em.). — *Moyen de compléter les involutions d'ordre supérieur.* (7 p.)

Partant de ce théorème, qu'un faisceau de courbes détermine sur une transversale une involution de points, l'auteur construit les points correspondant à un point d'une involution du $n^{\text{ième}}$ ordre, comme intersections de la transversale avec une courbe du $(n-1)^{\text{ième}}$ ordre, possédant un point $(n-2)$-uple, et pouvant, par conséquent, se construire avec la règle.

Staudigl (R.). — *Construction d'une conique, lorsqu'elle est déterminée par des points et des tangentes imaginaires.* (14 p., 1 pl.)

Ordinairement on exécute ces constructions pour le cas où les éléments imaginaires sont déterminés comme points doubles d'une involution. L'auteur développe les constructions connues, en partant de l'hypothèse plus générale, que les éléments imaginaires sont donnés, non par des séries ou faisceaux involutoires, mais par des séries ou faisceaux projectifs. Cependant les figures projectives conduisent toujours à des figures involutoires, de sorte que, en dehors de cette réduction, ce travail n'offre aucun résultat essentiellement neuf.

Neumayer (G.). — *Projet de préparatifs pour le passage de Vénus en* 1874. (28 p., 1 carte.)

Oppolzer (Th. v.). — *Détermination définitive de l'orbite de la planète* (59) *Elpis.* (76 p.)

Weyr (Em.). — *Communications géométriques.* (2 art., 8-9 p.)

L'auteur développe, par des considérations géométriques, l'équa-

tion de corrélation des figures 1-2-formes, pour le cas où les éléments doubles coïncident avec les éléments de ramification respectifs, et il obtient la formule

$$\zeta\eta^2 = k.$$

Il applique ensuite cette équation aux courbes du troisième ordre, et, outre un grand nombre de théorèmes connus, il démontre encore le suivant :

« Si un système de courbes du troisième ordre (et de quatrième classe) touche en un même point deux droites fixes, les triades de rayons, menées de ce point aux points d'inflexion de ces courbes, forment une involution cubique, dans laquelle les deux droites fixes sont des rayons triples. »

Waltenhofen (A. v.). — *Sur la puissance des électro-aimants.* (16 p., 2 pl.)

La puissance d'un électro-aimant, lorsque l'intensité du courant augmente, commence par croître plus rapidement que l'intensité du courant, comme l'ont reconnu Lenz, Jacobi, Dub; puis elle croît proportionnellement, conformément aux expériences de Dal Negro, et, à la fin, elle croît de plus en plus lentement, en s'approchant d'un maximum, comme Müller et Poggendorff l'ont observé. Une aimantation qui, sans porte-poids, correspond à la moitié environ de la saturation, produit déjà une puissance voisine du maximum.

Waltenhofen (A. v.). — *Recherches magnétiques, principalement au point de vue de l'emploi de la formule de Müller.* (26 p., 1 pl.)

La formule de Müller, d'après les explications données dans ce Mémoire, ne peut concorder avec les observations que pour les fortes aimantations. L'électromagnétisme des faisceaux et des tubes croît d'abord beaucoup plus rapidement que celui des verges pleines; mais il tend plus tard vers un maximum qui correspond au poids.

T. LXII; juillet-décembre 1870.

Winckler (A.). — *Sur les relations entre les intégrales abéliennes complètes d'espèce différente.* (76 p.)

« L'objet de ce travail est de rechercher les relations soit entre les simples sommes, soit entre les produits des intégrales abéliennes

complètes d'espèce différente, par une autre voie et avec plus de généralité qu'on ne l'a fait jusqu'ici.

» Pour obtenir les équations entre des fonctions *linéaires* de semblables intégrales, l'auteur emploie le procédé indiqué dans un précédent Mémoire [1] : « Sur les fonctions abéliennes complètes », sans toutefois supposer connus les résultats qu'il y a établis. Ici les équations ne sont pas restreintes au cas où le numérateur rationnel de la fraction sous le signe intégral ne dépasse pas un certain degré, et où le dénominateur ne contient que la racine carrée d'une fonction rationnelle; elles comprennent encore les cas où le numérateur est de degré quelconque, et où le dénominateur contient, outre le radical carré, un facteur rationnel, et enfin aussi le cas où le radical est au numérateur.

» Il serait beaucoup plus difficile de déduire ces relations du théorème d'Abel, comme on le reconnait sans peine d'après le Mémoire de Jacobi : *De functionibus duarum variabilium quadrupliciter periodicis,* qui ne traite que le plus simple des cas indiqués.

» Les équations entre les produits des intégrales en question s'obtiennent par la détermination de la valeur de certaines intégrales multiples, d'après une méthode dont le point de départ coïncide avec celui qu'a choisi M. Weierstrass pour le calcul des deux intégrales doubles servant de base à sa théorie des modules de périodicité. L'extension aux intégrales multiples se fait au moyen de l'expression à laquelle Cayley a donné le nom de *Pfaffien,* et d'une autre expression analogue, ayant avec la première des propriétés communes. Les résultats sont plus généraux que ceux que l'on connait jusqu'ici; partant de la même source que les équations correspondantes de Weierstrass, ils fournissent, comme cas particuliers, non-seulement l'intégrale multiple connue, trouvée par Jacobi et Haedenkamp, mais encore la généralisation des formules auxquelles Lamé a été conduit par la considération des coordonnées elliptiques. Elles embrassent ainsi la plupart des relations de cette espèce connues jusqu'à ce jour, et en font connaître en même temps beaucoup de nouvelles. »

---

(1) *Sitzungsberichte*, t. LVIII. Voir *Bulletin,* t. I, p. 209.

Puschl (K.). — *Sur la quantité de chaleur et la température des corps.* (26 p.)

Exner (K.). — *Sur les courbes d'intensité pendant la durée d'une sensation lumineuse.* (5 p.)

Hornstein (K.). — *Sur l'orbite de la comète de Hind, pour l'année* 1847. (17 p.)

Weyr (Ed.). — *Sur les coniques semblables.* (10 p.)

L'auteur étudie les sections coniques qui sont semblables à une section conique donnée, et qui passent par quatre points, ou qui passent par trois points en touchant une droite donnée.

Weiss (E.). — *Contributions à la connaissance des étoiles filantes.* 2e Mémoire. (68 p.)

Pfaundler (L.) et Platter (H.). — *Sur la capacité calorifique de l'eau dans le voisinage de son maximum de densité.* (14 p.)

Loschmidt (J.). — *Recherches expérimentales sur la diffusion des gaz, en l'absence de cloison poreuse.* 2e Mémoire. (11 p.)

König (J.). — *Contributions à la théorie de l'excitation électrique des nerfs.* (10 p.)

Wretschko (A.). — *Recherches expérimentales sur la diffusion des mélanges gazeux (lorsque, aux deux gaz soumis à la diffusion, on mêle des proportions égales en volume d'un troisième gaz).* (15 p.)

Waltenhofen (A. v.). — *De l'attraction exercée par une spirale magnétique sur un noyau de fer mobile.* (16 p.)

Les intensités de courant x, pour lesquelles des barreaux de fer d'égale longueur et de poids différents sont maintenus en suspension dans une spirale magnétisante verticale, sont les abscisses des points d'intersection d'une droite avec les courbes $y = F(x)$, $y = f(x)$, ..., y représentant les moments magnétiques que les barreaux acquerraient dans la spirale pour les intensités de courant x.

Oppolzer (Th. v.). — *Sur la comète de Winnecke* (comète III, 1819). 1er Mémoire. (21 p.)

Peterin (J.). — *Sur la formation de figures électriques annulaires par le courant d'une machine à influence.* (8 p., 1 pl.)

Benigar (J.). — *Recherches expérimentales sur la diffusion des mélanges gazeux.* (12 p.)

Weyr (Em.). — *Sur les développées des courbes dans l'espace.* (5 p.)

Par des considérations projectives de limites, on établit les propriétés projectives des faisceaux de normales construits en deux points d'une courbe gauche. De là découlent diverses propriétés des développées des courbes gauches.

Littrow (K. v.). — *Approches physiques des planètes de* (1) *à* (82), *pendant l'année prochaine* (1871). (5 p.)

Weiss (E.). — *Discussion des observations exécutées pendant l'éclipse totale de Soleil du* 18 *août* 1868, *et des résultats qui en découlent.* (144 p., 2 pl.)

T. LXIII; janvier-mai 1871.

Wassmuth (A.). — *Sur le travail produit par le courant électrique dans l'aimantation d'un barreau de fer.* (5 p.)

L'auteur détermine le travail développé par le courant dans la rotation des aimants moléculaires, et il trouve que le travail développé dans l'unité de volume du fer est égal au produit de la force magnétique par son moment magnétique. En substituant l'expression, donnée par Weber, de la force magnétisante, on trouve que, pour une petite force magnétisante, le travail développé est proportionnel au carré de l'intensité du courant, tandis que, pour une force très-grande, le travail croît en raison simple de cette intensité.

Stefan (J.). — *Sur l'équilibre et le mouvement, et en particulier sur la diffusion des mélanges gazeux.*

I. Équations de l'équilibre. — II. Équations du mouvement. — III. Sur la diffusion d'un mélange de deux gaz. — IV. Sur la diffusion d'un mélange de trois gaz. — V. Intégration approximative des équations de la diffusion d'un mélange de trois gaz. — VI. Sur la diffusion d'un mélange de deux gaz dans un troisième gaz simple. — VII. Influence de l'humidité sur la diffusion. — VIII. Sur la diffusion des gaz à travers les parois poreuses.

Exner (K.). — *Sur les maxima et les minima des angles sous*

lesquels les surfaces courbes sont coupées par des rayons vecteurs. (10 p., 1 pl.)

Ce Mémoire doit être considéré comme la suite du Mémoire publié en 1868 : « Sur les maxima et les minima des angles sous lesquels des courbes sont coupées par des rayons vecteurs. » Après avoir complété le Mémoire en question, l'auteur démontre géométriquement et analytiquement ce théorème *non conversible* :

« Si une surface est coupée en un de ses points par un rayon vecteur sous un angle maximum ou minimum, l'origine des rayons vecteurs est située sur l'un des deux plans normaux principaux du point d'intersection, et, de plus, sur un cercle construit sur le rayon de courbure principal correspondant comme diamètre. »

Pfaundler (L.). — *Démonstration élémentaire de l'équation fondamentale de la théorie dynamique des gaz.* (11 p., 1 pl.)

Il s'agit de la relation

$$p = \frac{nmc^2}{3v},$$

dans laquelle n désigne le nombre, m la masse, et c la vitesse des molécules gazeuses contenues dans le volume v, et p la pression exercée par leurs chocs sur l'unité de surface.

Stefan (J.). — *De l'influence de la chaleur sur la réfraction de la lumière dans les corps solides.* (23 p.)

Schulhof (L.). — *Calcul de l'orbite de la planète* (108) *Hécube.* (19 p.)

Stern. — *Contributions à la théorie de la résonnance des corps solides, en tenant compte des vibrations simultanées de l'air.* (15 p.)

Boltzmann (L.). — *Sur l'équilibre calorifique entre des molécules gazeuses polyatomiques.* (22 p.)

I. Mouvement des atomes dans les molécules. — II. Chocs des molécules entre elles.

Seydler (A.). — *Éléments de la comète* II, 1869. (2 p.)

Weyr (Em.). — *Sur les courbes gauches rationnelles du quatrième ordre.* (12 p.)

Après avoir développé l'équation

$$A_4(\xi)_4 - A_3(\xi)_3 + A_2(\xi)_2 - A_1(\xi)_1 = 1$$

[où $(\xi)_k$ est la somme des combinaisons de $k^{\text{ième}}$ classe des quatre paramètres ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4], à laquelle doivent satisfaire quatre points ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4, situés dans un même plan, l'auteur traite, en s'appuyant sur cette équation, les propriétés connues de cette courbe, relatives aux plans osculateurs, aux tangentes, aux sécantes simples et triponctuelles, etc.

Ditscheiner (L.). — *Sur quelques nouveaux phénomènes d'interférences de Talbot.* (25 p.; 1 pl.)

Ditscheiner (L.). — *Sur un appareil simple pour obtenir des couples de couleurs complémentaires avec le schistoscope de Brücke.* (11 p.)

Ditscheiner (L.). — *Sur la détermination des longueurs d'onde des raies de Fraunhofer.* (6 p.)

Niemtschik (R.). — *Méthodes générales pour représenter les intersections des plans avec les surfaces coniques et cylindriques, des droites avec les sections coniques, et des coniques confocales entre elles.* (33 p.; 2 pl.)

Les méthodes exposées dans tous les Traités un peu détaillés de Géométrie descriptive pour la construction des courbes d'intersection sont développées dans ce long article, sans qu'on y trouve rien de nouveau, soit comme point de vue, soit comme résultat. On peut juger à quel point l'auteur est peu familier avec les progrès accomplis par la Géométrie dans notre siècle, par ce fait que, en 1871, il parle, à la fin de son travail, de ses droits de priorité relativement à l'emploi d'*une seule projection* au lieu de deux pour la découverte de divers théorèmes de Géométrie de situation.

Lang (V. v.). — *Sur l'écoulement des gaz.* (15 p.)

Oppolzer (Th. v.). — *Sur l'orbite de la planète* (62) *Erato.* (35 p.)

Lang (V. v.). — *Sur la dispersion anormale des prismes aigus.* (3 p.)

Lang (V. v.). — *Sur la dioptrique d'un système de surfaces sphériques concentriques.* (7 p.)

Boltzmann (L.). — *Quelques théorèmes généraux sur l'équilibre de la chaleur.* (33 p.)

I. Dépendance entre les théorèmes relatifs aux phénomènes que présentent les molécules gazeuses polyatomiques, et le principe du dernier multiplicateur de Jacobi. — II. Équilibre de la chaleur entre un nombre fini de points matériels. — III. L'équilibre de chaleur entre des molécules gazeuses déduit, à l'aide d'une hypothèse, de l'équilibre de chaleur entre un nombre fini de points matériels.

Boltzmann (L.). — *Démonstration analytique du deuxième théorème fondamental de la théorie mécanique de la chaleur, au moyen des théorèmes sur l'équilibre de la force vive.* (21 p.)

Raabe (A.). — *Résolution des équations algébriques de degré quelconque, même à coefficients complexes, à l'aide de la représentation des quantités complexes due à Gauss.* (27 p.)

Koutny (E.). — *Description de la parabole au moyen de points donnés et de tangentes données.* (13 p.; 1 pl.)

L'auteur construit dans neuf cas la parabole comme projection centrale d'un cercle.

Unferdinger (Fr.). — *Sur la théorie des substitutions simultanées dans les intégrales doubles et triples.* (36 p.)

T. LXIV; juin-décembre 1871.

Hornstein (C.). — *Sur la dépendance entre le magnétisme terrestre et la rotation du Soleil.* (13 p.; 2 pl.)

Weiss (E.). — *Sur les variations brusques de certains éléments de réduction d'un instrument.* (28 p.)

Littrow (K. v.). — *Rapport sur la détermination, exécutée par M. le professeur E. Weiss, de la latitude et de l'azimut sur le Laaer Berg, près de Vienne.* (7 p.)

Niemtschik (R.). — *Sur la construction de l'intersection de deux surfaces courbes, en se servant de sphères et de surfaces de révolution.* (8 p.; 1 pl.)

L'auteur, professeur à l'Institut I. et R. Polytechnique de Vienne, fait voir, avec les plus grands détails, comment on peut construire

les intersections des surfaces de révolution avec les ellipsoïdes et avec d'autres surfaces, prises dans des positions particulières.

SEYDLER (A.). — *Sur l'orbite de la première comète de l'année 1870.* (8 p.)

STEFAN (J.). — *Sur les lois de l'induction électrodynamique.* (32 p.)

WINCKLER (A.). — *Sur l'intégration de l'équation différentielle du premier ordre à coefficients rationnels du second degré.* (37 p.)

L'auteur s'occupe ici de l'équation différentielle de la forme générale

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} &(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Hx + 2Ky + L)\,dx \\ &+ (A'x^2 + 2B'xy + C'y^2 + 2H'x + 2K'y + L')\,dy = 0, \end{aligned} \right.$$

qui, dans l'ordre de simplicité, vient immédiatement après l'équation à coefficients rationnels du premier degré, équation que l'on sait intégrer dans tous les cas. L'équation connue, intégrée par Jacobi ([1]), est un cas particulier de l'équation (1), dans lequel les coefficients seraient assujettis aux quatre relations

$$A = A' + 2B = C + 2B' = C' = 0.$$

M. Winckler établit que l'équation (1) admet encore une intégrale, de composition analogue à celle de l'intégrale de Jacobi, dans le cas où l'on a entre les coefficients trois relations seulement d'une certaine forme, ce qui comprend, comme cas particulier, le résultat de Jacobi.

De cette solution, on déduit encore d'autres cas particuliers. correspondant à quatre ou à cinq relations plus simples entre les coefficients : ce sont des cas d'exception, qui donnent lieu à des intégrales en partie transcendantes.

Un second résultat consiste à faire voir que, dans certaines conditions, l'équation en question est satisfaite par le produit des puissances de quatre expressions linéaires, produit qui devient encore en partie transcendant dans certains cas particuliers.

([1]) *Journal de Crelle*, t. 74.

Hann (J.). — *Études sur les vents dans l'hémisphère boréal, et leur influence climatologique.* 2e Partie : *L'été.* (53 p.; 1 pl.)

Oppolzer (Th. v.). — *Établissement des éphémérides, données dans l'*Annuaire de Berlin *pour* 1874, *pour les planètes* (58) *Concordia*, (59) *Elpis*, (62) *Erato*, (64) *Angélina*, (91) *Égine et* (113) *Amalthée.* (36 p.)

Lang (V. v.). — *Sur la théorie dynamique des gaz.* (5 p.)

Pression sur la paroi du vase. — Frottement interne. — Conductibilité pour la chaleur.

Staudigl (R.). — *Sur l'identité des constructions en projection perspective, oblique et orthogonale.* (5 p.; 1 pl.)

L'auteur établit ce théorème :

« Tous les problèmes de Géométrie descriptive dans lesquels n'interviennent ni mesure de longueur, ni mesure angulaire, c'est-à-dire tous les problèmes qui appartiennent à la Géométrie de situation, peuvent se résoudre absolument de la même manière, en projection, soit perspective, soit oblique, qu'en projection orthogonale (axonométrique). »

Or ce théorème n'a pas besoin d'une démonstration spéciale, puisque toutes ces espèces de projections ont pour type général la projection centrale.

Frombeck (H.). — *Contribution à la théorie des fonctions de variables complexes.* (80 p.)

Ce Mémoire, qui fait suite au Chapitre du tome II du *Compendium der höheren Analysis* de Schlömilch, qui traite des *Fonctions d'une variable complexe* (p. 44-68), développe d'abord cette idée, que la théorie des fonctions de variables complexes gagne en clarté et en généralité, lorsqu'on étend les recherches à des fonctions d'un nombre quelconque d'expressions, complexes ou non, de plusieurs variables. Il étudie la condition de possibilité de l'équation

$$F[f(x, y, z, \ldots)] = f(\varphi, \chi, \psi, \ldots).$$

Il ajoute ensuite des compléments à plusieurs sections du travail de M. Schlömilch, principalement à celles qui traitent des intégrales le long d'un contour.

Bloek (E.). — *Communication relative aux catalogues d'aurores boréales.* (2 p.)

Herrmann (E.) — *Formule pour la tension des vapeurs saturées.* (28 p.)

I. Essais pour établir la loi pour la vapeur d'eau. — II. Hypothèse qui conduit à la forme $p = \left(\frac{1+\beta_1\tau}{1+\alpha_1\tau}\right)^k$. — III. Série des tensions des vapeurs d'autres liquides.

Oppolzer (Th. v.). — *Sur le calcul de l'orbite d'une comète.* 3e Mémoire. (23 p.)

Dans deux Mémoires insérés dans les tomes LVII et LX ([1]) des *Sitzungsberichte,* M. Oppolzer a exposé une nouvelle méthode, destinée à remplacer la méthode d'Olbers, dans les cas où celle-ci tombe en défaut; mais la méthode proposée exigeait de très-longs calculs, provenant surtout d'une certaine équation qu'il fallait résoudre par des essais répétés. L'auteur expose les moyens qu'il a trouvés depuis pour abréger ces calculs, et maintenant sa méthode, qui l'emportait déjà sur celle d'Olbers, au point de vue de l'exactitude des résultats, peut soutenir la comparaison sous le rapport de la facilité du travail.

Gegenbauer (L.). — *Évaluations d'intégrales définies.* (24 p.)

Pelz (C.). — *Sur le problème du point brillant.* (11 p.; 2 pl.)

Étant données les positions de la source lumineuse et de l'œil, les points brillants (points qui réfléchissent dans l'œil le rayon venant de la source lumineuse) sont déterminés, dans ce Mémoire, pour un cercle et pour une conique en général, si ces courbes sont considérées comme des lignes réfléchissant la lumière. L'auteur donne encore différentes constructions des courbes focales cubiques générales.

Oppolzer (Th. v.) — *Sur l'orbite de la planète* (91) *Égine.* (45 p.)

Stefan (J.). — *Sur l'induction diamagnétique.* (10 p.)

Winckler (A.). — *Sur le développement et la sommation de quelques séries.* (28 p.)

([1]) Voir *Bulletin*, t. VII, p. 139.

L'auteur traite d'abord du développement des intégrales définies sous une forme qui trouve son application dans le Calcul des probabilités, et le présente ensuite sous d'autres formes essentiellement plus générales.

La deuxième Partie de son Mémoire se rapporte à une remarquable formule de sommation donnée par Jacobi [1], laquelle peut être considérée comme un cas très-simple d'une formule appartenant aux éléments du Calcul différentiel. De cette dernière formule on tire avec facilité un grand nombre d'autres formules sommatoires non moins remarquables, les unes connues, les autres nouvelles.

Le Mémoire se termine par la sommation de séries qui n'ont pas encore été étudiées, et dont les plus simples sont de la forme

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} (b_1^{\lambda+n} - a_1^{\lambda+n})(b_2^{\lambda+n-1} - a_2^{\lambda+n-1})\ldots(b_n^{\lambda+1} - a_n^{\lambda+1}) \frac{x^{\lambda+n} f^{(\lambda+n)}(0)}{(\lambda+n)!}.$$

La somme de ces séries, lors même que l'on supprime des groupes de termes intermédiaires en certain nombre et dans un certain ordre, peut s'exprimer sous forme linéaire au moyen des valeurs de la fonction $f(z)$ correspondant à différents arguments.

T. LXV; janvier-mai 1872.

Seydler (A.). — *Sur l'orbite de Dioné* (106). (9 p.)

Gegenbauer (L.). — *Sur les fonctions besséliennes de seconde espèce.* (3 p.)

Stefan (J.). — *Recherches sur la conductibilité des gaz pour la chaleur.* 1er Mémoire. (25 p.)

Weiss (E.). — *Détermination de la différence de longitude Vienne — Wiener-Neustadt par des transports de chronomètres.* (23 p.)

Handl (A.). — *Note sur l'intensité absolue et sur l'absorption de la lumière.* (4 p.)

Frombeck (H.). — *Sur les intégrales de Fourier et leurs analogues.* (56 p.)

---

[1] *Zur combinatorischen Analysis* (*Journal de Crelle*, t. 22).

L'auteur prend pour point de départ de ses recherches l'identité d'une intégrale définie de forme indéterminée, avec ce que Cauchy nomme la *valeur principale* de cette intégrale, principe qui nous semble fort sujet à contestation.

Strzelecki (F. v.). — *Théorie des courbes de vibration.* (119 p.)

L'auteur appelle *courbes de vibration* la trajectoire que décrit un point matériel libre en vertu de plusieurs vibrations élémentaires auxquelles il est soumis simultanément. Il suppose les durées de ces vibrations élémentaires commensurables entre elles, ce que l'on peut faire en altérant la réalité aussi peu que l'on voudra.

Après avoir établi, dans une Introduction, les notations relatives aux groupes d'indices de la suite T_1, T_2,..., T_n des durées des vibrations élémentaires, et avoir établi les propriétés de ces groupes, l'auteur divise son Mémoire en huit paragraphes, dont voici les titres :

§ 1. Développement des équations des courbes de vibration. — § 2. Remarques générales. — § 3. Propriétés générales des courbes de vibration quelconque. — § 4. Propriétés générales de certaines courbes de vibration particulières. — § 5. Points singuliers des courbes de vibration quelconques. — § 6. Points singuliers de certaines courbes de vibration particulières. — § 7. Influence de certaines altérations des phases initiales sur la forme de la courbe de vibration. — § 8. Cas particulier. L'auteur développe comme exemple le cas où les vibrations élémentaires sont au nombre de *trois*.

Littrow (K. v.). — *Rapport sur les déterminations des différences de longitude, Berlin-Vienne-Leipzig, exécutées par MM. C. Bruhns, W. Förster et E. Weiss.* (2 p.)

Stern (S.). — *Contributions à la théorie de la résonnance des cavités remplies d'air.* (10 p.)

Stefan (J.). — *Sur la théorie dynamique de la diffusion des gaz.* (41 p.)

Gegenbauer (L.). — *Note sur les fonctions* X_n^m *et* Y_n^m. (4 p.)

Handl (A.). — *Sur la constitution des fluides.* (*Contributions à la théorie moléculaire,* II.) (12 p.)

Hornstein (C.). — *Sur l'influence de l'électricité du Soleil sur l'état barométrique.* (20 p.; 1 pl.)

Lang (V. v.). — *Sur la théorie dynamique des gaz,* II. (4 p.)

Stefan (J.). — *Sur les stratifications dans les fluides vibrants.* (4 p.)

T. LXVI; juin-décembre 1872.

Gegenbauer (L.). — *Sur la théorie de la fonction* X_n^m. (8 p.)

Stefan (J.). — *Sur les propriétés des oscillations d'un système de points.* (26 p.)

Boltzmann (L.). — *Sur la loi d'action des forces moléculaires.* (7 p.)

Gegenbauer (L.). — *Sur la théorie des fonctions besséliennes de seconde espèce.* (4 p.)

Mach (E.). — *Sur la détermination stroboscopique de la hauteur du son.* (8 p.)

Boltzmann (L.). — *Nouvelles études sur l'équilibre de chaleur entre les molécules gazeuses.* (96 p.)

Gegenbauer (L.). — *Expressions intégrales des fonctions* Y_n^m. (6 p.)

Oppolzer (Th. v.). — *Explication des éphémérides données dans l'*Annuaire de Berlin, *pour* 1875, *pour les planètes* (58) *Concordia,* (59) *Elpis,* (62) *Erato,* (64) *Angélina et* (113) *Amalthée.* (15 p.)

Gegenbauer (L.). — *Développement suivant les fonctions* X_n^{2r+1}. (7 p.)

Stefan (J.). — *Sur les expériences d'interférences faites avec la double plaque de quartz de Soleil.* (29 p.)

Introduction. — I. Formules d'intensité. — II. Raies de Talbot. — III. Expérience avec deux fentes.

Littrow (K. v.). — *Sur l'observation des plus petites phases lunaires visibles.* (22 p.)

La question de savoir à quel instant, après la nouvelle Lune, le croissant commence à devenir visible à l'œil nu, a occupé le célèbre philosophe juif Maimonide, qui y a consacré les chapitres XII-XVII de ses *Constitutiones de sanctificatione novilunii*. M. de Littrow donne la traduction allemande de ces curieux passages, avec quelques additions explicatives.

Pelz (C.). — *Sur la détermination des axes des projections centrales des surfaces du second degré.* (10 p., 1 pl.)

L'auteur développe une construction *directe* des axes principaux des projections centrales du second degré, dans laquelle il n'est pas nécessaire de déterminer préalablement deux diamètres conjugués quelconques de la projection. En outre, cette construction directe est beaucoup plus simple que la construction employée habituellement pour la détermination de deux diamètres conjugués.

T. LXVII; janvier-mai 1873.

Puschl (C.). — *Sur la dépendance entre l'absorption et la réfraction de la lumière.* (6 p.)

Boltzmann (L.). — *Détermination expérimentale de la constante de diélectricité des isolateurs.* (64 p., 1 pl.)

Mach (E.) et Fischer (A.). — *La réflexion et la réfraction du son.* (8 p.)

Les auteurs montrent que les lois qui ont lieu pour la lumière ne sont applicables au son que lorsque les surfaces réfléchissantes et réfringentes sont très-grandes par rapport à la longueur d'onde, ou lorsque l'on a affaire à des surfaces d'ondes entièrement fermées.

Dvořák (V.). — *Sur la théorie des raies de Talbot.* (12 p.)

Domalíp (K.). — *Sur la théorie mécanique de l'électrolyse.* (12 p.)

L'auteur calcule, d'après les actions chimiques qui ont lieu dans une chaîne de Pincus, la force électromotrice de cette chaîne. Cette valeur, obtenue théoriquement, est comparée aux valeurs trouvées par l'expérience, et conduit l'auteur à cette conclusion, que, pour la vérification expérimentale des valeurs des forces électromotrices calculées au moyen des équivalents thermiques des actions chimiques d'une chaîne, la méthode de Poggendorff, exclue par Bosscha, est précisément la mieux appropriée de toutes.

WINCKLER (A.). — *Intégration des équations linéaires du second ordre, dont les coefficients sont des fonctions linéaires de la variable indépendante.* (40 p.)

Euler a signalé, dans ses *Institutiones Calculi integralis,* les cas les plus simples dans lesquels l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0,$$

où p, q sont des fonctions rationnelles de x, peut être intégrée au moyen d'une intégrale définie. La voie indirecte qu'il a suivie, en se donnant d'avance l'intégrale et cherchant l'équation à laquelle elle correspond, est la plus avantageuse, parce qu'il est généralement plus facile de faire coïncider l'équation obtenue avec une équation donnée, que de trouver une intégrale définie satisfaisant à cette équation donnée et qui, par un choix convenable de ses limites, représente une fonction de x finie et complétement déterminée ; et de plus, lorsqu'on cherche l'intégrale générale de l'équation, il faut, outre l'intégrale définie déjà connue, en trouver une seconde, essentiellement différente, et satisfaisant aux mêmes conditions. En tout état de choses, il faut que le nombre des cas à distinguer soit réduit au minimum. En outre, il y a d'autres conditions à remplir, suivant l'usage que l'on veut faire de l'intégrale. Il convient, d'après cela, que les intégrales particulières soient exprimées aussi directement que possible, au moyen des quantités qui entrent dans l'équation, ce qui permet d'établir, sans avoir besoin de transformer l'équation, des formules qui conviennent à toutes les valeurs, réelles ou complexes, des coefficients. C'est à ce point de vue que M. Winckler a repris l'étude de l'équation bien connue

$$(\mathrm{H}_0 t + \mathrm{H})\frac{d^2y}{dt^2} + 2(\mathrm{K}_0 t + \mathrm{K})\frac{dy}{dt} + (\mathrm{L}_0 t + \mathrm{L})y = 0.$$

KOLBE (J.). — *Démonstration d'un théorème sur la présence de racines complexes dans une équation algébrique.* (3 p.)

BOUÉ (A.). — *Remarques sur la théorie, reprise par M. Walfert, des aurores boréales produites par des phénomènes de réflexion et de réfraction des rayons solaires.* (11 p.)

Gegenbauer (L.). — *Note sur quelques intégrales définies.* (3 p.)

Ditscheiner (L.). — *Sur le rapport d'intensité et la différence de marche des rayons polarisés dans la diffraction, qui se dirigent perpendiculairement et parallèlement en plan d'incidence.* (30 p.)

Oppolzer (Th. v.) — *Explication des éphémérides, données dans l'*Annuaire de Berlin, *pour* 1876, *des planètes* (58) *Concordia,* (59) *Elpis,* (62) *Erato,* (64) *Angélina et* (113) *Amalthée.* (31 p.)

Weyr (Em.). — *Sur les courbes planes rationnelles du quatrième ordre, dont les tangentes aux points doubles sont des tangentes d'inflexion.* (6 p.)

Le type principal de ces courbes est la lemniscate. L'auteur démontre, dans cette Note, quelques théorèmes, qui sont des généralisations de ceux qu'il a publiés sur la lemniscate [1].

Niemtschik (R.). — *Sur la construction des lignes du second ordre inscrites l'une à l'autre.* (16 p., 1 pl.)

Streintz (H.). — *Sur les variations d'élasticité et de longueur d'un fil parcouru par un courant galvanique.* (32 p., 1 pl.)

L'auteur parvient à ce résultat, que le courant électrique ne produit aucune altération dans les coefficients d'élasticité, comme Wertheim l'avait annoncé. Il trouve, au contraire, que les fils sont plus fortement dilatés par le courant électrique que par un égal échauffement provenant de l'extérieur. Pour l'acier trempé seulement, cette dilatation particulière due au courant est insensible, quoique, pour l'acier doux, dont le coefficient de dilatation est à très-peu près le même, elle soit très-notable.

Unferdinger (Fr.). — *Sur quelques limites qui se rattachent à la valeur de* $\lim \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$ *pour* $n = \infty$. (6 p.)

Unferdinger (Fr.). — *Le rayon de courbure moyen et la courbure moyenne en un point donné d'une surface.* (12 p.)

---

(1) Voir *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 1er Cahier : « Quelques théorèmes nouveaux sur la lemniscate. »

Dans le cas où les courbures des deux sections principales sont de même sens, le rayon de courbure moyen est égal à la moyenne géométrique des rayons de courbure principaux, et la courbure moyenne à la moyenne arithmétique des courbures des sections principales.

UNFERDINGER (Fr.). — *Sur les propriétés remarquables de l'expression*

$$z^n - \binom{m}{1}(z-1)^n + \binom{m}{2}(z-2)^n - \ldots + (-1)^m \binom{m}{m}(z-m)^n,$$

et sur leurs applications. (8 p.)

MACH (E.). — *Sur les anneaux de Stefan dans le phénomène des anneaux colorés de Newton, et sur quelques phénomènes d'interférences qui s'y rattachent.* (11 p.)

Il s'agit du système d'anneaux décrits pour la première fois par M. Stefan, et qui se présentent dans les places non colorées du verre courbe de Newton, lorsqu'on les regarde en couvrant la moitié de la pupille avec un mica.

HORNSTEIN (C.). — *Sur la dépendance entre la variation diurne de l'état barométrique et la rotation du Soleil.* (32 p.)

WALTENHOFEN (A. v.). — *Sur un théorème général pour le calcul de l'action d'une spirale magnétisante.* (16 p.)

L'auteur établit le théorème suivant : « La force magnétisante d'une spirale est proportionnelle au produit de la force du courant par la somme des cosinus de tous les angles que les droites menées dans le plan d'une section axiale d'un point de chaque spire aux extrémités de l'axe du barreau aimanté forment avec cet axe. » Ce théorème est une généralisation du théorème de Haedenkamp.

E. W.

JOURNAL für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von C.-W. Borchardt (¹).

T. LXXVII; 1873.

Lübeck (G.). — *Sur l'influence qu'exerce sur le mouvement d'un pendule un liquide frottant contenu dans une cavité sphérique du pendule.* (37 p.)

Dans ses expériences sur l'attraction de la Terre, Bessel attachait un cylindre creux de laiton à la verge d'un pendule, et, après l'avoir rempli du corps qu'il voulait soumettre à l'expérience, il observait la durée des oscillations de ce pendule. C'est de là qu'il conclut que la force attractive de la Terre donne la même accélération à tous les corps ; et, ayant calculé au moyen de ces observations la longueur du pendule à secondes, il obtint des valeurs qui différaient seulement de grandeurs du même ordre que les erreurs d'observation. Cependant, quand il remplit d'eau son cylindre creux, il en résulta une plus grande longueur du pendule à secondes (0,0318 lignes de Paris) ; mais lorsqu'il augmenta la verge du pendule d'une toise, et qu'il y suspendit le même cylindre d'eau, le calcul des nouvelles observations fournit la même valeur que pour les corps solides. Bessel croyait expliquer ce phénomène par les oscillations du liquide, qui ne permettent pas de calculer le moment d'inertie pour un liquide comme on le fait pour un solide. Il supposait que la force centrifuge était plus grande dans les couches supérieures que dans celles du fond, qu'elle causait un mouvement intérieur du liquide et qu'elle avait une plus grande valeur pour un pendule court que pour un long. L'auteur ne croit pas pouvoir adopter cette explication, parce qu'elle lui semble défectueuse en elle-même, et qu'elle néglige la différence essentielle qu'il y a entre un liquide et un solide. Le mouvement relatif de deux molécules voisines dépendra de la grandeur des forces qui les sollicitent, et de la résistance qu'elles opposent au déplacement ; pour le calcul du mouvement dans un liquide, il nous faut donc la connaissance de la force qui fait glisser deux couches liquides l'une contre l'autre, et c'est la théorie du frottement des liquides qui en tient compte. Mais comme

(¹) Voir *Bulletin*, t. VI, p. 188.

la forme cylindrique de la masse d'eau de Bessel offre bien des difficultés au calcul, l'auteur a préféré aborder le problème pour le cas d'une sphère creuse remplie du liquide, comme le lui avait proposé M. O.-E. Meyer, dont on connaît les travaux nombreux sur le frottement intérieur des fluides. Nous n'entrerons pas dans les détails de l'analyse mathématique donnée par l'auteur dans huit paragraphes ; en voici les résultats :

1. Le liquide renfermé dans la sphère creuse ne s'ébranle pas par suite du mouvement rectiligne, mais seulement par l'oscillation autour du diamètre normal au plan des oscillations du pendule. Le liquide décrit aussi des oscillations autour de ce diamètre avec des vitesses angulaires qui ne sont constantes que sur chaque couche sphérique concentrique de la sphère creuse.

2. Un mouvement éventuel initial du liquide, qui serait de l'ordre de la vitesse pendulaire, s'anéantit par le frottement intérieur, au plus tard après un certain intervalle de $\mathfrak{T}$ secondes, où $\mathfrak{T}$ se calcule d'après une formule donnée.

3. Après l'écoulement du temps $\mathfrak{T}$, ou bien dès le commencement si le liquide était en repos au commencement de l'expérience, le mouvement pendulaire est périodique en toute rigueur.

4. L'amplitude des oscillations va en diminuant suivant une progression géométrique, si le temps augmente suivant une série arithmétique.

5. La durée des oscillations est plus grande que dans le cas où le pendule contiendrait un liquide parfait au lieu d'un liquide frottant.

6. En général, la durée des oscillations sera plus grande que si l'on avait remplacé le liquide par un corps solide de masse égale. Si la longueur du pendule est très-grande, le frottement intérieur du liquide n'exerce pas d'influence sur le mouvement du pendule.

Schwarz (H.-A.). — *Sur les courbes isothermes algébriques dans le plan.* (9 p.)

Soit u une fonction réelle des coordonnées rectangles x, y, qui satisfasse à l'équation aux différentielles partielles

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$$

Lamé appelle *isotherme* le faisceau des courbes représentées par l'équation $u = c$ quand on fait varier le paramètre c. Si u est une fonction algébrique des deux variables réelles x et y, on peut toujours ajouter à la fonction u une autre fonction vi, telle que $w = u + vi$ devienne une fonction analytique $w = f(z)$ de la variable complexe z; et cette fonction donne lieu à une représentation conforme du faisceau des courbes sur un faisceau de droites parallèles $u = c$ dans le plan de la grandeur complexe w. L'étude de cette fonction $w = f(z)$, ou plutôt de son inverse $z = \varphi(w)$, conduit M. Schwarz à ce théorème : « Le faisceau des courbes orthogonales d'un faisceau d'isothermes algébriques planes est toujours lui-même un faisceau d'isothermes algébriques. » Enfin la fonction complexe $w = f(z)$, dont la partie réelle a une valeur constante pour le contour de chaque courbe d'un faisceau, formé de courbes isothermes algébriques et situé dans le plan de la variable complexe z, est :

I. Une fonction algébrique de z;

II. Ou, si μ désigne un nombre convenablement choisi, la quantité μw, et par suite aussi μwi est le logarithme d'une fonction algébrique de z;

III. Ou μw est une intégrale elliptique de première espèce, sous la forme normale de Jacobi, à module réel, et dont la limite supérieure est une fonction algébrique de z.

SOHNCKE (L.). — *Les systèmes ponctuels réguliers d'étendue illimitée dans le plan.* (55 p.)

Imaginons un système de points séparés dans un plan; joignons chaque point à tous les autres par des lignes droites. Il peut arriver que ces faisceaux de droites, inégaux en général, deviennent égaux ou symétriques pour tous les points, ce qui indique un arrangement régulier des points. Un système de points d'étendue illimitée s'appelle *régulier*, si les faisceaux issus de tous ses points sont ou égaux ou symétriques. (L'égalité est supposée permettre une su-

perposition des faisceaux sans qu'on ait besoin de les écarter du plan et de les retourner, tandis que la symétrie exige préalablement cette opération avant qu'on réussisse à les superposer.) M. Sohncke fut porté à étudier cette question en essayant d'approfondir les idées de Delafosse et de Bravais sur la structure des cristaux, et voilà pourquoi il pose et résout ce problème : « Trouver tous les systèmes ponctuels réguliers possibles d'étendue illimitée dans le plan ». Voici ses résultats :

Il n'y a que treize systèmes ponctuels réguliers qui soient essentiellement distincts. On en peut regarder dix comme étant formés de polygones égaux, réguliers ou semi-réguliers (un polygone dont tous les angles et les côtés *alternatifs* sont égaux est appelé *semi-régulier*), détachés les uns des autres et dont les sommets portent les points du système. Ces polygones sont ou des triangles réguliers (syst. I, II, III), ou des carrés (IV et V) ou des rectangles (VI, VII, VIII, X), ou des hexagones semi-réguliers (IX). Les systèmes qu'on peut considérer comme formés d'octogones ou de dodécagones réguliers et semi-réguliers se trouvent déjà compris parmi les systèmes mentionnés. Il n'existe pas de systèmes engendrés par d'autres polygones réguliers. Les systèmes dont les points résultent des sommets de polygones réguliers de même espèce (par exemple I, II, III) diffèrent par la distribution et la position de ces polygones. Les trois autres systèmes peuvent être considérés comme étant formés de bandes homogènes parallèles, infinies et équidistantes ; les points du système en occupent les lignes parallèles de démarcation. On trouve quelquefois une connexion entre des systèmes qui semblent être bien différents ; des cas spéciaux de l'un appartiennent en même temps à l'autre. Deux planches servent à éclaircir la théorie.

La connaissance des systèmes plans ouvre une voie aux systèmes de l'espace quand on empile ceux-là de certaines manières : on peut aussi étudier directement les systèmes ponctuels polyédraux ; mais la recherche complète de tous les systèmes réguliers possibles de l'espace offre plus de difficultés. Quand on l'aura finie, il faudra les classer suivant le degré de symétrie dont ils jouissent, et enfin les comparer aux systèmes des cristaux. L'auteur promet d'y revenir dans un nouveau Mémoire.

Mertens (F.). — *Extrait d'une lettre au Rédacteur.* (3 p.)

Schröter (H.). — *Recherche des éléments coïncidants réciproques dans le plan et dans l'espace.* (38 p.)

La réciprocité générale du premier degré, c'est-à-dire la relation où se correspondent linéairement deux éléments hétérogènes tels que point et droite, ou point et plan, donne lieu au problème important de déterminer les éléments qui coïncident si l'on superpose les plans et les espaces qui portent ces éléments. L'étude de cette question, commencée en partie par Seydewitz, Pfaff et Reye, fait l'objet du Mémoire de M. Schröter. Il se sert des méthodes de la Géométrie synthétique, et n'exclut pas la considération des éléments imaginaires.

La première Partie, qui s'occupe de deux plans réciproques superposés, fait voir qu'il existe deux systèmes polaires ou bien deux sections coniques $K^{(2)}$ et $k^{(2)}$, telles que chaque tangente de $K^{(2)}$ coupe $k^{(2)}$ en deux points qui correspondent à cette tangente dans l'un et l'autre sens de la relation réciproque ; de même, les deux tangentes menées d'un point de $k^{(2)}$ à $K^{(2)}$ correspondent à ce point. Si les coniques $K^{(2)}$ et $k^{(2)}$ sont réelles, elles se touchent en deux points. De plus, il y a en général trois points et trois droites formant les sommets et les côtés d'un même triangle, qui se correspondent mutuellement. Si, par suite d'une position spéciale, les deux coniques se confondent entièrement, les deux systèmes polaires deviennent identiques, ce qui fait l'involution des systèmes.

Pour deux espaces réciproques superposés, étudiés dans la seconde Partie du Mémoire, on obtient des résultats analogues : tous les plans qui contiennent leurs points correspondants enveloppent une surface $F^{(2)}$ du second degré, et tous les points qui tombent sur leurs plans correspondants forment une autre surface $f^{(2)}$. Si deux droites correspondantes des deux espaces réciproques se rencontrent, leurs points d'intersection sont un point de $f^{(2)}$, leur plan est tangent à $F^{(2)}$. Tous les rayons passant par un point (x, y_1) arbitraire de $f^{(2)}$, et coupés par leurs rayons correspondants, appartiennent aux deux plans (X_1, Y) qui passent par ce point et lui correspondent suivant les deux systèmes ; chaque plan tangent mené du point (x, y_1) de $f^{(2)}$ à $F^{(2)}$ coupe les deux plans (X_1, Y) suivant deux rayons correspondants, et réciproquement. Les points qui correspondent à un même plan suivant les deux systèmes forment les sommets d'un tétraèdre ; les deux surfaces $F^{(2)}$ et $f^{(2)}$ se tou-

chent aux sommets de ce tétraèdre; donc la courbe dans l'espace, intersection des deux surfaces, se réduit à un quadrilatère gauche dans l'espace. Si l'on construit deux surfaces du second ordre qui se touchent en quatre points, la correspondance n'est pas encore déterminée; il faut encore ajouter un couple d'éléments correspondants, un plan et un point, pour fixer complétement la relation.

Les résultats de la première Partie du Mémoire ne sont pas nouveaux, ceux de la seconde n'épuisent pas la recherche.

Ce qu'il y a d'intéressant dans le Mémoire consiste plutôt dans la méthode synthétique employée par l'auteur.

Selling (Ed.). — *Sur les formes quadratiques binaires et ternaires.* (87 p.)

On sait que toutes les formes quadratiques binaires et ternaires de même invariant (discriminant) peuvent être réduites, par des transformations homogènes et linéaires de déterminant 1, à des formes nommées *réduites*. Le nombre en est fini, si les coefficients des formes sont des nombres entiers, et elles se distribuent en des classes dont chacune contient toutes les réduites équivalentes, une seule en général, dans le cas des formes définies. De plus, les formes binaires indéfinies réduites d'une classe présentent une période qui se reproduit continuellement après une suite définie de transformations; donc c'est par la répétition d'une seule transformation ou de son inverse qu'on obtient toutes les *transformations semblables* (par lesquelles une forme se transforme en soi-même).

M. Selling démontre ensuite la proposition analogue pour les formes ternaires. Cependant il y a toujours, non pas une seule transformation, mais un nombre fini de transformations dont se compose chaque transformation semblable. Le moyen dont il se sert, c'est la *réduction continuelle*, découverte par M. Hermite (t. 41 et 47 de ce *Journal*). Aux formes indéfinies f sont étroitement liées certaines formes positives $\mathfrak{f}$ par cette condition : leurs invariants ont une valeur égale, mais de signe opposé pour les formes binaires, égale et de même signe pour les formes ternaires; leurs invariants simultanés s'évanouissent. Les coefficients variables des formes binaires positives $\mathfrak{f}$ contiennent un seul argument variable continu. Si l'on représente les valeurs de cet argument par les points d'une ligne continue, celle-ci se décompose en

plusieurs parties de longueur finie, et telles que la réduction de la forme $\mathfrak{f}$ conduit à la même forme positive réduite tant que le point variable reste sur la même partie. Les coefficients de la forme ternaire $\mathfrak{f}$ contiennent deux arguments variables continus. Si l'on représente les valeurs de ces arguments par les points d'une surface, celle-ci se décompose en plusieurs champs de grandeur finie, et tels que la réduction de la forme $\mathfrak{f}$ conduit à la même forme positive réduite tant que le point variable reste sur le même champ. Les formes issues de la forme indéfinie f et engendrées par les mêmes substitutions sont aussi nommées *réduites*. Les réduites nommées *principales,* qu'a signalées M. Hermite dans ses recherches sur les formes binaires indéfinies, ne sont pas identiques aux réduites de Lagrange et de Gauss ; mais une modification des conditions de réduction pour les formes positives rétablit cette identité.

D'une manière analogue, M. Selling change aussi les conditions de réduction acceptées jusqu'à présent par tous les géomètres pour les formes ternaires positives. Les champs ne demandent que la considération des lignes de démarcation, les lignes celle des extrémités de ces lignes, les deux genres de limites celle des limites appelées *points de croisement,* qui peuvent se trouver sans aucun calcul ; tandis que, chez M. Hermite, il pourrait sembler qu'il fallût la résolution ou au moins la discussion d'une équation du quatrième degré pour passer d'un champ à un champ voisin. Une planche lithographiée donne pour six classes différentes la position de tous les divers champs ou les régions qui comprennent un certain nombre de champs. On arrive à une division de toute la surface infinie en répétant un nombre infini de fois le dessin des parties de surface suivant une règle définie.

Revenons encore aux conditions de réduction. Si la forme positive est $\mathfrak{a}x^2 + 2\mathfrak{f}xy + \mathfrak{h}y^2$, il faut qu'aucun des trois nombres $\mathfrak{g} = -\mathfrak{h} - \mathfrak{f}$, $\mathfrak{h} = -\mathfrak{a} - \mathfrak{f}$ et $\mathfrak{f}$ ne soit positif ; donc, si l'on pose $\mathfrak{a} + 2\mathfrak{f} + \mathfrak{b} = \mathfrak{c}$, la somme $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} = -2(\mathfrak{g} + \mathfrak{h} + \mathfrak{f})$ devient la plus petite possible. D'une manière semblable, une forme positive $\mathfrak{a}x^2 + \mathfrak{b}y^2 + \mathfrak{c}z^2 + 2\mathfrak{g}yz + 2\mathfrak{h}zx + 2\mathfrak{f}xy$ est nommée *réduite* si aucun des six nombres $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{l} = -\mathfrak{a} - \mathfrak{h} - \mathfrak{f}$, $\mathfrak{m} = -\mathfrak{b} - \mathfrak{f} - \mathfrak{g}$, $\mathfrak{n} = -\mathfrak{c} - \mathfrak{g} - \mathfrak{h}$ n'est positif ; donc, si l'on pose

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} = 2(\mathfrak{g} + \mathfrak{h} + \mathfrak{f}) = \mathfrak{d},$$

la somme $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d}=-2(\mathfrak{g}+\mathfrak{h}+\mathfrak{f}+\mathfrak{l}+\mathfrak{m}+\mathfrak{n})$ devient la plus petite possible. (L'auteur a utilisé ici une idée introduite par M. Borchardt, à l'occasion de recherches bien différentes (*Mémoires de l'Académie de Berlin,* 1865 et 1866). D'après l'interprétation connue des formes quadratiques, ces conditions de réduction expriment que, pour les formes binaires, le triangle dont les côtés ont les longueurs respectives $\sqrt{\mathfrak{a}}$, $\sqrt{\mathfrak{b}}$, $\sqrt{\mathfrak{c}}$ est acutangle suivant le langage usuel, ou, si l'on fixe pour chaque ligne une direction invariable comme positive, que deux côtés quelconques du triangle forment des angles obtus ; et de même pour les formes ternaires, si l'on construit un quadrilatère gauche dans l'espace dont les côtés aient les longueurs respectives $\sqrt{\mathfrak{a}}$, $\sqrt{\mathfrak{b}}$, $\sqrt{\mathfrak{c}}$, $\sqrt{\mathfrak{d}}$, les angles compris entre les directions de deux côtés consécutifs seront obtus. D'où il s'ensuit que, si en outre $\mathfrak{h}.\mathfrak{m}$ n'est pas plus grand que $\mathfrak{g}.\mathfrak{l}$ ou $\mathfrak{f}.\mathfrak{n}$, les quatre plans déterminés par deux côtés consécutifs forment un tétraèdre à arêtes aiguës suivant le langage usuel ; alors la forme ternaire correspondant à ce tétraèdre et adjointe à la forme ternaire remplit aussi les conditions de réduction.

Schröter (H.). — *La solution Steinérienne du problème de Malfatti.* (15 p.)

Toutes les solutions connues du problème ne semblent pas répondre à la demande énoncée par Steiner au t. 1 de ce *Journal,* de développer la construction qu'il y a donnée, à l'aide des théorèmes très-élémentaires sur le contact de cercles, etc., qui précèdent le passage où il publie sa découverte. Les procédés de la plupart des auteurs qui ont traité ce sujet ressemblent plutôt à une vérification *a posteriori* qu'à un développement original.

M. Schröter croit satisfaire pour la première fois au sens exact des paroles de Steiner.

Frobenius (G.). — *Sur le déterminant de plusieurs fonctions d'une variable.* (13 p.)

Cantor (G.). — *Sur une propriété de la totalité des nombres réels algébriques.* (5 p.)

Milinowski. — *Remarque sur le Mémoire de M. Geiser, relatif aux courbes du troisième ordre et intitulé : « Sur deux problèmes de Géométrie »,* (t. 67 de ce *Journal*). (6 p.)

Reye (Th.). — *Sur les pentagones et les hexagones polaires des systèmes polaires dans l'espace.* (20 p.)

Dans un système polaire de l'espace, on appelle *tétraèdre polaire* tout tétraèdre dont les sommets sont les pôles des faces opposées. De même, l'auteur nomme *pentagone polaire* tout pentagone dans l'espace dont les dix arêtes passent chacune par le pôle de la face opposée, et *hexagone polaire* tout hexagone dans l'espace dont les dix arêtes passent chacune par le pôle de la face opposée. D'abord on trouve certains théorèmes sur deux relations géométriques entre dix points d'une surface de second ordre, théorèmes qu'a déjà donnés M. Paul Serret dans sa *Géométrie de direction* (1869); après cela, M. Reye étudie les pentagones et les hexagones polaires qui se présentent dans ces relations, et montre la fécondité des nouvelles notions par une série de théorèmes intéressants.

Mertens (F.). — *Sur quelques lois asymptotiques de la théorie des nombres.* (50 p.)

Le Mémoire se rapporte à certaines expressions asymptotiques qui reviennent dans quelques-unes des fonctions de la théorie des nombres. Les deux premiers problèmes ont été déjà traités par Dirichlet dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin.* Cependant l'auteur a cru devoir les aborder de nouveau, parce que sa méthode lui semblait être plus directe, et que l'écart de l'expression asymptotique pouvait être fixé plus étroitement. A cet effet, il a souvent remonté aux séries données par Euler dans son *Introduction à l'analyse des infinis.* Voici les problèmes traités :

1. Soit φn le nombre de tous les nombres compris dans la suite $1, 2, \ldots, n$, et premiers avec n; trouver l'expression asymptotique de la somme $\sum_{m}^{1,G} \varphi m$ pour de grandes valeurs de G.

2. Soit ψm le nombre des diviseurs de m qui ne sont divisibles par aucun carré (excepté 1); trouver l'expression asymptotique de la somme $\sum_{m}^{1,G} \psi m$ pour de grandes valeurs de G.

3. Trouver la somme des valeurs inverses de tous les nombres premiers qui peuvent être représentés par une forme quadratique

donnée, positive et proprement primitive, de déterminant régulier D, qui ne sont pas diviseurs de 2 D et ne surpassent pas une limite donnée G.

4. Soit H(— D) le nombre des classes dans lesquelles se partagent toutes les formes quadratiques positives proprement primitives de déterminant négatif — D ; trouver l'expression asymptotique de la somme $\sum_{1}^{G}{}_{n} \mathrm{H}(-n)$.

5. Soit, dans la théorie des nombres complexes de la forme $a+bi$, φm le nombre de tous les nombres d'un système complet de résidus suivant le module m, qui n'ont pas de facteur commun avec m ; soit ΩG la totalité de tous les nombres entiers complexes (excepté zéro) dont les normes sont $\leqq$ G ; trouver l'expression asymptotique de la somme $\sum_{1}^{G}{}_{m} \varphi m$ étendue à tous les membres de ΩG.

6. Soit $\mathfrak{T}m$ le nombre de tous les diviseurs du nombre entier complexe $m = a + bi$; déterminer l'expression asymptotique de la somme $\sum \mathfrak{T}m$ étendue à tous les nombres du complexe ΩG, où ΩG a la même signification que dans 5.

7. Soit ψm le nombre des diviseurs du nombre entier complexe $m = a + bi$ qui ne sont divisibles par aucun carré (excepté ± 1) ; déterminer l'expression asymptotique de la somme $\sum \psi m$ étendue à tous les nombres ΩG.

8. Soient k, l deux nombres complexes donnés, sans diviseur commun, k en outre étant premier ; déterminer l'expression asymptotique de la somme des normes inverses de tous les nombres premiers complexes impairs compris dans la forme $kt + l$ et dont les normes ne surpassent pas la limite donnée G.

Fuchs (L.). — *Sur la représentation au moyen des fonctions algébriques.* (14 p.)

Est-il possible de représenter, au moyen d'une fonction algébrique, un plan entier, à l'exception d'une ligne qui ne renferme

pas une aire, sur la surface d'un cercle? L'auteur montre que de toutes les fonctions algébriques il n'y a que les fonctions rationnelles du second degré qui satisfassent aux conditions données. Cette proposition se prête à une généralisation où le cercle est remplacé par une aire simplement connexe et dont le contour est soumis à certaines conditions.

МАТЕМАТИЧЕСКІЙ СБОРНИКЪ (¹).

T. VII, 1er et 2e cahier; 1874.

LETNIKOF (A.-B.). — *Recherches relatives à la théorie des intégrales de la forme*

(1) $$\int_a^x (x-u)^{p-1} f(u)\,du.$$

(205 p.)

Cet important Mémoire est divisé en trois Chapitres :

Chapitre I. — Ce Chapitre, ayant pour titre : *Résolution des problèmes du calcul inverse des intégrales définies de la forme* (1), sert d'introduction aux deux autres.

Le calcul inverse des intégrales définies a, comme on sait, pour objet la recherche de la forme d'une fonction $f(\alpha)$ définie par une équation analogue à la suivante :

$$\int_a^x (x-\alpha)^{p-1} f(\alpha)\,d\alpha = \varphi(x).$$

La science actuelle ne possède aucune méthode générale de résolution de ce problème, important par le rôle qu'il joue dans les diverses questions de Mécanique et de Physique mathématique.

Sans aborder la question dans toute sa généralité, l'auteur se borne à traiter une classe de ces problèmes dont la solution peut servir de base à une théorie nouvelle et rigoureuse des dérivées à indice quelconque.

(¹) Voir *Bulletin*, t. VII, p. 314.

En prenant pour point de départ un problème connu d'Abel, qui conduit à l'équation

$$\int_a^x \frac{f'(\alpha)\,d\alpha}{(x-\alpha)^\mu} = \varphi(x),$$

dans laquelle $f(\alpha)$ est inconnue, l'auteur démontre que la formule trouvée par Abel et mise sous la forme

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(1-p)}\,\frac{d}{dx}\int_a^x (x-\beta)^{-p}\,\varphi(\beta)\,d\beta$$

fournit une solution simple de plusieurs problèmes réputés très-difficiles, et entre autres de ceux qu'a traités M. Liouville à l'aide de dérivées à indice quelconque ([1]). Nous regrettons que l'étendue de cet article ne nous permette pas de reproduire ces solutions.

M. Letnikof démontre ensuite que la formule d'Abel peut être étendue aux intégrales multiples, et il établit la formule de réduction suivante :

$$\int_a^\mu (\mu-\varepsilon)^{s-1}\,d\varepsilon \ldots \int_a^\gamma (\gamma-\beta)^{q-1}\,d\beta \int_a^\beta (\beta-\alpha)^{p-1} f(\alpha)\,d\alpha$$
$$= \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)\ldots\Gamma(s)}{\Gamma(p+q+\ldots+s)}\int_a^\mu f(\alpha)\,(\mu-\alpha)^{p+q+\ldots+s-1}\,d\alpha,$$

qui renferme, comme cas particuliers, les formules connues de MM. Schlömilch et Liouville.

Chapitre II. — *Nouvelles bases de la théorie des dérivées définies à indice quelconque.*

Soit $f(\alpha)$ une fonction qui pour les valeurs de α comprises entre les limites a et x est continue et finie et même infinie, mais d'ordre r inférieur à l'unité, c'est-à-dire telle que

$$\lim(\alpha-a)f(\alpha) = 0, \quad \text{ou} \quad \lim(\alpha-a)^r f(\alpha) = \text{A},$$

A étant une quantité finie autre que zéro.

Dans ce cas, la fonction $f(\alpha)$ peut être intégrée entre les limites a et x, et l'intégration répétée plusieurs fois conduit à la formule

---

([1]) *Journal de l'École Polytechnique*, XXI[e] cahier, p. 1-69.

connue

$$\int_a^x \cdots \int_a^x \int_a^x f(x)dx^p = \frac{1}{1.2\ldots(n-1)} \int_a^x (x-a)^{n-1} f(\alpha)d\alpha.$$

Le second membre de cette formule n'est autre chose qu'une valeur particulière de l'expression plus générale

$$(1) \qquad \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^x (x-a)^{p-1} f(\alpha)d\alpha,$$

où p est supposé quelconque. Cette expression indique une certaine opération effectuée sur $f(\alpha)$, et peut être représentée par le symbole $[D^{-p}f(x)]_a^x$ appelée *dérivée définie* de $f(x)$ à indice $-p$; de sorte que la dérivée définie à indice négatif est définie par la relation

$$[D^{-p}f(\alpha)]_a^x = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^x (x-a)^{p-1} f(\alpha)d\alpha,$$

p étant positif et différent de zéro.

L'auteur établit d'abord les diverses propriétés de ce symbole, pouvant être résumées par les relations

$$[D^{-q}D^{-p}f(x)]_a^x = [D^{-p}D^{-q}f(x)]_a^x = [D^{-p-q}f(x)]_a^x,$$
$$\frac{d^n}{dx^n}[D^{-p}f(x)]_a^x = [D^{n-p}f(x)]_a^x, \quad n-p>0,$$

et passe ensuite aux dérivées à indice positif, en prenant pour point de départ la dérivée à indice $q<1$, que l'on peut calculer par la formule

$$[D^q f(x)]_a^x = \frac{d}{dx}[D^{q-1}f(x)]_a^x = \frac{1}{\Gamma(1-q)} \frac{d}{dx} \int_a^x (x-a)^{-q} f(\alpha)d\alpha,$$

dans laquelle $q-1$ est négatif.

Par des différentiations de proche en proche et des transformations que nous sommes obligé de passer sous silence, on arrive à la formule générale

$$[D^{p+q}f(x)]_a^x = \frac{(x-a)^{-p-1}}{\Gamma(1-q)} \int_a^x \frac{(\alpha-a)^{q+p}}{(x-\alpha)^q} [D^{p+1}(\alpha-a)^{1-q}f(\alpha)]_a^\alpha d\alpha,$$

dans laquelle p est quelconque, entier ou fractionnaire, positif ou négatif, et q est une fraction plus petite que l'unité.

Cette formule donne l'expression de la dérivée définie à indice quelconque, et renferme comme cas particulier la formule de Grünwald.

En appliquant ses formules aux dérivées du produit des deux fonctions, l'auteur parvient à l'extension de la formule de Leibnitz aux dérivées du produit.

M. Letnikof examine en particulier le cas où la limite inférieure a devient infinie, et il établit les conditions auxquelles doit satisfaire $f(\alpha)$ pour que l'opération indiquée par le symbole $[D^q f(\alpha)]_\infty^x$ soit possible. Il démontre que les dérivées entre les limites ∞ et x jouissent des mêmes propriétés que la dérivée précédemment étudiée. Les deux opérations de dérivation entre les limites a et x et ∞ et x sont liées par la relation

$$[D^p y]_a^x = (-1)^p \frac{(z-a)^{p+1}}{c^p} [D^p (z-a)^{p-1} y]_\infty^z,$$

où y est une fonction de $x = \frac{1}{z}$.

Pour terminer ce Chapitre, l'auteur examine la question de l'existence de la fonction complémentaire, c'est-à-dire de la fonction $\theta(x)$, telle que l'on ait

$$[D^p \theta(x)]_a^x = 0;$$

il fait remarquer que de la définition même de la dérivée définie il résulte que ce symbole a toujours une valeur déterminée, quel que soit p; que, par conséquent, s'il existe une fonction $\theta(x)$, telle que sa dérivée $[D^p]_a^x$ soit nulle, il ne s'ensuit pas que l'on puisse ajouter $\theta(x)$ à une des valeurs de $[D^{-p} F(x)]_a^x$.

Chapitre III. — *Applications à l'intégration de quelques équations différentielles.*

M. Letnikof applique la théorie des dérivées à indice quelconque à l'intégration de l'équation

$$(a_0 x^2 + b_0 x + c_0) \frac{d^2 y}{dx^2} + (a_1 x + b_1) \frac{dy}{dx} + a_2 y = 0,$$

connue dans la science par les travaux des plus célèbres géomètres (Euler, Laplace, Gauss, Jacobi, etc.) dont elle a été l'objet.

Dans l'hypothèse que les racines a et b de $a_0 x^2 + b_0 x + c_0 = 0$

sont réelles et inégales, l'équation ci-dessus peut se mettre sous la forme

$$(A)\qquad (x-a)(x-b)\frac{d^2y}{dx^2}+(c+hx)\frac{dy}{dx}+ky=0.$$

L'auteur démontre d'une façon générale que cette équation admet des solutions particulières :

1° Qui deviennent zéro ou l'infini, pour $x=a$, $x=b$ ou $x=\infty$;

2° Qui restent finies pour $x=a$ ou $x=b$, indiquées par Riemann.

En prenant la dérivée d'indice p, le premier membre de (A) se réduit à

$$(x-a)(x-b)[D^{p+2}y]_a^x+[c-p(a+b)+(h+2p)x][D^{p+1}y]_a^x,$$

c'est-à-dire qu'en posant

$$(B)\qquad [D^{p+1}y]_a^x=u$$

on obtient une équation linéaire du premier ordre, qui fait connaître immédiatement u, et l'on tire y de l'équation (B).

En faisant des hypothèses particulières sur les coefficients, on obtient douze solutions particulières représentées par les quatre formules suivantes :

$$y=[D^{-p-1}U_1]_e^x,$$
$$y=(x-a)^{p+1-r}[D^{-r}V_1]_e^x,$$
$$y=(x-b)^{p+1-s}[D^{-s}V_2]_e^x,$$
$$y=(x-a)^{p+1-r}(x-b)^{p+1-s}[D^{p+1-r-s}U_2]_e^x,$$

dont chacune donne trois solutions, en posant $e=a, b, \infty$ (U_1, U_2, V_1, V_2 sont des fonctions des binômes $x-a$, $x-b$).

Pour le cas où les racines a et b sont égales, on obtient huit solutions particulières distinctes, représentées par les formules analogues que nous ne reproduisons pas ici.

M. Letnikof applique les formules générales ci-dessus aux divers cas particuliers de l'équation (A), dont nous indiquons les plus importantes :

1° Équation hypergéométrique

$$x(x-1)\frac{d^2y}{dx^2}+[-\gamma+(\alpha+\beta+1)x]\frac{dy}{dx}+\alpha\beta y=0,$$

pour laquelle il donne vingt-quatre solutions particulières, parmi lesquelles on retrouve les solutions obtenues par d'autres voies par Kummer [1] et Jacobi [2];

2° Équation

$$(x^2-1)\frac{d^2y}{dx^2}+2x\frac{dy}{dx}-n(n+1)y=0,$$

dont les solutions particulières forment les fonctions sphériques, et donnent les expressions générales de ces fonctions pour un indice quelconque;

3° Équation

$$z^2\frac{d^2F}{dz^2}+z\frac{dF}{dz}+(z^2-n^2)F=0,$$

qui conduit aux fonctions besséliennes, et donne les expressions générales de ces fonctions.

A cet aperçu, trop sommaire, du travail de M. Letnikof, nous ajouterons que la simplicité de sa méthode et la clarté de son exposition en rendent la lecture facile et attrayante, et nous regrettons que la langue peu connue dans laquelle il est écrit le rende inaccessible à la plus grande partie de nos lecteurs. La théorie de dérivées à indice quelconque, telle que la présente M. Letnikof, me paraît de nature à pouvoir presque faire partie des cours d'enseignement classique.

Imschenetsky (V.-G.). — *Méthode générale d'intégration de deux équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre de deux fonctions de deux variables indépendantes.* (9 p.)

Preobrajensky (V.-V.). — *De l'intégration des équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur.* (48 p.)

Serdobinsky (V.-E.). — *Équations numériques dépendant des expressions du premier degré.* (20 p.)

Solutions des équations de la forme

$$ax=c+F(bx+m),$$

et leurs diverses propriétés. A. P.

---

(1) *Ueber die hypergeometrische Reihe* (*Crelle's Journal*, Bd. 15).

(2) *Untersuchungen über die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe* (*Crelle's Journal*, B. 51).

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Bellavitis (G.), traduit par C.-A. Laisant. — Exposition de la méthode des Équipollences. — Paris, Gauthier-Villars, 1874. 1 vol. in-8°, 183 p., 37 fig. dans le texte. 4 fr. 50 c.

Bertin (E.), ingénieur des Constructions navales. — Complément à l'étude sur la houle et le roulis. — Cherbourg, 1870. Grand in-8°, 43 p.

Bour (E.). — Cours de Mécanique et Machines, professé à l'École Polytechnique. Troisième et dernier fascicule : Dynamique et Hydraulique. — Paris, Gauthier-Villars, 1874. 1 vol. in-8°, 396 p., 125 fig. dans le texte. 7 fr. 50 c.

Cahours (A.). — Traité de Chimie générale élémentaire. Chimie organique : Leçons professées à l'École Polytechnique. 3e édition, tome II. — Paris, Gauthier-Villars, 1874. 1 vol. in-12, 395 p. 6 fr.

Derrien (I.) et Weil (M.). — La section militaire à l'exposition de Vienne en 1873, d'après les documents français et étrangers. — Paris, Dejey, 1874, 1 vol. grand in-8°, 356 p. 16 fr.

Endrès (E.). — Manuel du Conducteur des Ponts et Chaussées. Tome III. Applications. — Paris, Gauthier-Villars, 1875, 1 vol. in-8°, 404 p., 162 fig. dans le texte. 9 fr.

Flammarion (C.). — Études et lectures sur l'Astronomie. Tome V. — Paris, Gauthier-Villars, 1874. 1 vol. in-18, 320 p. 2 fr. 50 c.

Hermite (Ch.). — Sur la fonction exponentielle. — Paris, Gauthier-Villars, 1874. In-4°, 33 p. 2 fr. 50 c.

Jouffret (E.). — Théorie élémentaire des phénomènes que présentent le gyroscope, la toupie et le projectile oblong. — Paris, Gauthier-Villars, 1874. In-8°, 32 p. 1 fr.

Laurent (H.)— Mémoire sur les équations différentielles ordinaires et aux différentielles totales. — Paris, Gauthier-Villars, 1874, in-8°, 24 p. 1 fr. 75 c.

Lenthéric (J.). — Exposition élémentaire des diverses théories de la Géométrie moderne. — Paris (Montpellier), Gauthier-Villars, 1874. In-4°, 139 p., 6 pl. lith. 6 fr. 50 c.

Magnac (Aved de). — Recherches sur l'emploi des chronomètres à la mer. — Paris, Gauthier-Villars, 1874. Grand in-8°, 88 p., 1 pl. lith. 3 fr.

Mannheim (A.). — Sur les surfaces trajectoires des points d'une figure de forme invariable, dont le déplacement est assujetti à quatre conditions. — Paris, Gauthier-Villars, 1874. In-4°, 19 p. 1 fr. 50 c.

Marie (Max.). — Théorie des fonctions de variables imaginaires. Tome Ier. Nouvelle Géométrie analytique. — Paris, Gauthier-Villars, 1874. 1 vol. grand in-8°, 271 p. L'ouvrage complet (3 vol.) (pour les souscripteurs 15 fr.) : 20 fr.

Mémorial de l'Officier du Génie, n° 22. — Paris, Gauthier-Villars, 1874. 1 vol. in-8°, 470 p., 2 pl. 7 fr. 50 c.

Grillon : Étude sur le casernement de la Cavalerie en France. — *Peaucellier :* Note sur l'emploi du planimètre polaire de M. Amsler, dans le dessin de la fortification. — *Richard :* Expériences faites en 1869, avec les pyrothèques et une nouvelle machine dynamo-électrique à basse tension. — *Rousset :* Études sur la fabrication des amorces à employer pour mettre le feu aux mines, au moyen de l'électricité de tension. — *Barisien* et *Percin :* Notes sur la manœuvre du ponts-levis à contre-poids constant avec spirales. — *Curie :* Sur le réglage des pont-levis. — *Poulain :* Nouvel organe mécanique réciproque de transformation du mouvement circulaire alternatif en rectiligne alternatif. — *Javary :* Applications de la Photographie aux arts militaires. — *Fritsch :* Les dynamites (*suite*).

Ott (K. v.). — Die Grundzüge des graphischen Rechnens und der graphischen Statik. 3. Aufl. — Prag, Calve. 1 Thlr.

Painvin (L.). — Étude analytique de la développable circonscrite à deux surfaces du second ordre. (IIIe Partie). — Paris (Lille), Gauthier-Villars, 1874. In-8°, 160 p. 4 fr.

Picardat (A.). — Les Mines dans la guerre de campagne. — Paris, Gauthier-Villars, 1874. 1 vol. in-12, 162 p., 51 fig. dans le texte. 2 fr. 50 c.

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

CHELINI (D.), delle scuole Pie. — SULLA COMPOSIZIONE GEOMETRICA DE' SISTEMI DI RETTE, DI AREE E DI PUNTI. Bologna, 1870, in-4°, 51 p. — SULLA NUOVA GEOMETRIA DE' COMPLESSI. Bologna, 1871, in-4°, 31 p. ([1]).

L'illustre professeur D. Chelini, un des Quarante de la Société italienne des Sciences, avait publié, dès 1837 et 1838, dans le *Giornale Arcadico,* plusieurs articles sur les principes de la composition des droites et des aires, en les appliquant aux lignes et aux surfaces du premier et du second degré, pour donner un exemple de la facilité et de la généralité que leur usage introduit dans la Géométrie analytique. Puis, dans le Recueil périodique publié à Rome, à partir de 1845, sous le titre de *Raccolta scientifica,* par MM. Palomba, Tortolini, Cugnoni, il avait appliqué les mêmes principes aux courbures des lignes et des surfaces ([2]), aux démonstrations des formules fondamentales de la Trigonométrie plane et sphérique ([3]), aux centres des systèmes géométriques de points ([4]) et à l'usage des coordonnées obliquangles ([5]). Dans d'autres travaux, soit de Géométrie, soit de Mécanique, il était revenu plusieurs fois sur ce même sujet. Finalement, il a jugé utile de le reprendre et de le traiter avec étendue dans un Mémoire *Sulla composizione geometrica de' sistemi di rette, di aree e di punti,* inséré au tome X de la 2e série des *Mémoires de l'Institut de Bologne* ([6]), qu'il a fait suivre d'un autre Mémoire *Sulla nuova Geometria dei complessi,* publié dans le même Recueil, 3e série, t. I ([7]). Ces deux derniers Mémoires font le sujet du présent article.

([1]) Extraits des *Memorie dell' Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna,* t. X (2e série) et t. I (3e série). L'analyse dont nous donnons ici la traduction a été publiée par M. Ferdinando RUFFINI, dans le tome XII du *Giornale di Matematiche.*

([2]) T. I, p. 105.

([3]) T. II, p. 37.

([4]) T. V, p. 39.

([5]) *Ibid.,* p. 227.

([6]) Voir *Bulletin,* t. IV, p. 248.

([7]) Voir *Bulletin,* t. IV, p. 250.

Dans le premier Mémoire, l'auteur a pour but d'exposer les lois géométriques qui président à la composition et à la transformation des systèmes, soit de droites, soit d'aires, soit de points affectés de coefficients, abstraction faite de toute idée de force et de vitesse, dans le dessein de rendre purement géométriques les conceptions de Poinsot et de Chasles sur la composition et la réduction des forces et des rotations simultanées, et, en outre, de démontrer comment ces lois ouvrent un accès facile et attrayant aux autres théories de la Géométrie analytique et synthétique.

Après avoir défini la *résultante* de deux ou de plusieurs droites composantes, il établit le principe de la composition de plusieurs droites en une droite résultante; il passe au cas particulier des droites situées dans un même plan, pour en déduire l'aire d'un parallélogramme en fonction des composantes de ses côtés; puis il expose le principe des moments des droites situées dans un plan, d'où il tire les lois de la composition des droites parallèles et, par suite, celles de la composition des couples de droites, après avoir averti toutefois que, quand il parle de l'équivalence de deux systèmes de droites, cette équivalence doit s'entendre uniquement en ce qui regarde leurs projections et leurs moments, de sorte qu'elle n'est pas altérée lorsque, en un ou en plusieurs des points du système, on ajoute ou l'on supprime deux droites égales et de direction opposée.

Ces principes posés, il aborde la composition et la transformation d'un système quelconque de droites dans l'espace. Un système de droites peut toujours se réduire à une seule droite et à un seul couple, ou bien à un système de deux droites dans des conditions données. La solution du premier problème conduit naturellement à la définition de l'*axe central* d'un système de droites, lequel axe est la droite ayant pour propriété caractéristique de représenter sur elle-même (un quelconque de ses points étant pris pour centre de réduction) tant la droite résultante que le couple résultant, et à démontrer que, si le lieu du centre de réduction est une droite parallèle à l'axe central, le lieu de l'axe du couple résultant est un plan, et que, si le lieu du centre de réduction est une circonférence ayant pour axe l'axe central, le lieu de l'axe du couple résultant est un hyperboloïde gauche de révolution autour de l'axe central. Pour le second problème, on considère deux cas : 1° celui où l'une des

droites doit être perpendiculaire à un plan donné, et l'autre située dans ce même plan; 2° celui où l'une des droites doit se trouver sur une droite donnée de position dans l'espace. Par une construction très-simple, on résout le problème dans le premier cas, et en même temps on détermine dans le plan donné le point et la droite que Chasles a nommés le *foyer* et la *caractéristique* du plan. Le *foyer* est le point du plan où l'axe du couple résultant devient perpendiculaire au plan; la *caractéristique* est la droite du plan pour les points de laquelle l'axe du couple résultant se trouve situé dans le plan. La construction même suffit ensuite pour mettre en évidence certains théorèmes remarquables, qui acquièrent encore plus d'importance quand les droites représentent des rotations simultanées infiniment petites. Sur la solution du problème dans le second cas se fonde l'importante théorie des *droites conjuguées,* ainsi nommées parce que la détermination de l'une d'elles entraîne la détermination de l'autre. Dans ce cas aussi, la construction est très-simple; on en déduit ensuite, de la manière la plus claire, que les systèmes équivalents de droites conjuguées sont en nombre infini; que, dans chacun de ces systèmes, la droite qui mesure la plus courte distance des deux droites conjuguées passe par l'axe central et lui est perpendiculaire; que le volume du tétraèdre, déterminé par deux droites conjuguées, est constant pour tous les couples de droites. On fait également voir qu'un plan qui tourne autour d'une droite a son foyer sur la conjuguée de cette droite; d'où il s'ensuit que, si la droite autour de laquelle tourne le plan est perpendiculaire en un de ses points à l'axe du couple résultant, le plan tournant aura toujours son foyer sur cette même droite, laquelle, en vertu de cette propriété, est dite *conjuguée à elle-même.* On démontre enfin que, si, dans un système de droites équivalent à zéro, on a prouvé qu'une droite transversale rencontre toutes les droites moins une, elle devra rencontrer aussi cette dernière, et que, par conséquent, deux couples de droites conjuguées peuvent toujours être considérés comme des génératrices de même système d'un hyperboloïde.

L'auteur s'occupe ensuite d'examiner le mode de composition des aires, et traite en particulier de la détermination des composantes et des projections orthogonales sur trois plans coordonnés de l'aire d'un parallélogramme, s'ouvrant ainsi l'accès aux formules

générales relatives à la composition d'un système de droites, et de là à d'autres formules d'un fréquent usage, parmi lesquelles est celle qui donne le volume du tétraèdre déterminé par deux droites, en fonction du *moment* de ces mêmes droites, en appelant, d'après Cayley, *moment de deux droites* le produit de leur distance minimum par le sinus de leur inclinaison mutuelle; d'où ce théorème remarquable : « Étant données quatre positions de l'une des génératrices d'un hyperboloïde, les moments de trois d'entre elles, combinées chacune avec la quatrième, sont respectivement proportionnels aux moments de ces trois mêmes droites, combinées chacune avec une tangente menée par un point quelconque de la quatrième. »

Des résultats très-importants sont exposés dans le paragraphe suivant, dans lequel on suppose donnés deux systèmes de droites, et l'on trouve une relation entre la somme des volumes des tétraèdres déterminés en combinant chaque droite d'un système avec chaque droite de l'autre et les moments de ces couples de droites, et entre la somme de ces volumes les deux droites résultantes et les deux couples résultants des deux systèmes, ou bien les composantes des deux droites résultantes et les projections orthogonales des deux couples résultants obtenus en rapportant le système à trois axes coordonnés. En effet, de ces relations on tire directement les équations de Bardelli et de Spottiswoode, exprimant la condition à laquelle doivent satisfaire des droites en nombre quelconque pour former un système équivalent à zéro, la démonstration du principe mécanique des vitesses virtuelles et celles de quelques beaux théorèmes de Chasles, relatifs aux mouvements infiniment petits que l'on peut imprimer à un corps sollicité par des forces dans des conditions déterminées.

L'auteur passe enfin à la composition des systèmes de points affectés de coefficients, laquelle le conduit naturellement à la détermination des centres de gravité des figures, et, en ajoutant une condition spéciale, à la détermination des centres harmoniques, dont il démontre les principales propriétés.

Ayant ainsi exposé la théorie de la composition des quantités géométriques, l'auteur l'applique aux systèmes de coordonnées homogènes. Il parle, en premier lieu, des coordonnées triangulaires de points et de droites, et, avec une simplicité et une clarté admirables, il fait découler de la théorie des moments des droites et des

points, l'équation fondamentale exprimant la relation nécessaire qui existe entre les trois coordonnées d'un point rapporté aux trois côtés, ou d'une droite rapportée aux trois sommets du triangle; l'équation de la droite de l'infini; la condition du parallélisme de deux droites; l'expression de l'angle de deux droites; les équations de relation pour la transformation des coordonnées. De là il passe aux coordonnées tétraédriques de points et de plans et à celles de droites, et les questions analogues à celles que nous venons d'énumérer pour les coordonnées triangulaires sont résolues avec la même clarté et la même élégance, y compris le problème de la transformation des coordonnées. Ces applications offrent donc un nouveau moyen d'établir les principes fondamentaux de la méthode des coordonnées homogènes, et répandent une nouvelle lumière sur les relations entre les diverses espèces de coordonnées cartésiennes, triangulaires et tétraédriques.

Dans le second Mémoire, l'auteur se propose d'indiquer un point de départ pour la théorie de la relation projective, et de démontrer comment les lois qui régissent la composition des droites comprennent dans leur essence les principes fondamentaux de la *Nouvelle Géométrie des complexes* de Plücker.

La loi de la composition d'un système de points affectés de coefficients est le principe sur lequel on peut fonder celui de la relation projective. Soient sur une droite des points en nombre quelconque, affectés de coefficients déterminés. Si l'on divise chaque coefficient par la distance du point auquel le coefficient est attaché, à un point fixe de la droite, les points deviennent *harmoniques* par rapport au point fixe, et le point qui serait le centre de gravité des points donnés, si on les considérait comme affectés des nouveaux coefficients, devient le *centre harmonique* de ces mêmes points. Au moyen d'un faisceau de plans, projetons tous les points sur une transversale quelconque; si les coefficients des points ainsi déterminés sur la transversale sont supposés proportionnels à ceux de leurs correspondants, le centre harmonique des points de la transversale est le point correspondant au centre harmonique des points donnés. Du principe des moments on déduit ensuite que les deux systèmes de points situés, le premier sur la droite donnée, le second sur la transversale, sont liés entre eux par cette relation : que le rapport, appelé ordinairement *rapport anharmonique* (et que l'au-

teur voudrait qu'on nommât *rapport projectif*), de quatre points d'une droite, dont deux sont le point fixe relativement auquel les points sont harmoniques et le centre harmonique, et les deux autres sont deux des points harmoniques choisis à volonté, est égal au rapport anharmonique des quatre points correspondants de l'autre droite. Ainsi se trouve établi le lien intime entre deux systèmes de quatre points situés chacun sur une droite et ayant des rapports équianharmoniques, ou, suivant la dénomination proposée par l'auteur, des rapports projectifs égaux. En poursuivant cette voie, on arrive facilement à démontrer comment, sur deux droites, on peut considérer deux séries homographiques de points, une sur chaque droite, ou encore deux séries homographiques de points sur une seule droite, et, comme cas particulier, deux séries de points en involution; et l'on fait ressortir les propriétés fondamentales de ces séries, propriétés qui s'étendent aussi aux séries formées avec les éléments de deux faisceaux (rayons ou plans). Cette première Partie du Mémoire se termine par quelques applications aux coniques, tendant principalement à expliquer la manière de faire usage des principes précédemment établis dans les recherches géométriques.

La seconde Partie du Mémoire traite des *complexes linéaires* de Plücker, en vue d'indiquer le moyen de fonder la théorie des complexes linéaires sur celle des droites conjuguées équivalentes à un système de droites. Un système de droites, représenté par la droite résultante et par l'axe du couple résultant, peut, d'une infinité de manières, se transformer en un système de droites conjuguées; ou, en d'autres termes, dans un système de droites on peut considérer une infinité de couples de droites conjuguées. Cela posé, étant donné un système de droites, supposons qu'on veuille une autre droite, assujettie à la seule condition que la somme des deux tétraèdres, que l'on détermine en combinant chacune des deux droites d'un des couples de droites conjuguées du système donné avec la droite cherchée, soit nulle. Le système de toutes les droites propres à satisfaire la condition proposée constitue le *complexe linéaire* de Plücker. Il s'ensuit de là que les droites du complexe ne sont autres que les droites qui, dans le système donné, couperaient à la fois les deux droites d'un des couples (quel qu'il soit) de droites conjuguées, et qui auraient, par suite, la propriété d'être conjuguées à

elles-mêmes; d'où il résulte que les propriétés des complexes sont les mêmes qui appartiennent à l'ensemble des droites qui, dans un système donné de droites, sont conjuguées à elles-mêmes, et partant que les lois de la composition et de la transformation d'un système de droites suffisent pour rendre immédiatement évidentes toutes les propositions de Plücker sur les propriétés d'un complexe linéaire. Cette dernière conséquence est confirmée par l'auteur, à l'aide de plusieurs exemples tirés des propriétés qui avaient déjà été énoncées par Chasles dans la supposition que les droites représentaient des rotations simultanées.

La coexistence de deux complexes donne naissance à une *congruence linéaire,* qui est l'ensemble des droites communes aux deux complexes. La théorie des congruences est exposée par l'auteur avec sa clarté habituelle, et il démontre que les lois de la composition des systèmes de droites, quand on les a présentes à l'esprit, rendent intuitives les principales propriétés des congruences; il démontre que les trois congruences de trois complexes coexistants forment un hyperboloïde réglé, et il en déduit les théorèmes de Binet et de Plücker, relatifs, le premier au parallélépipède formé en menant par chaque directrice de l'hyperboloïde deux plans parallèles aux deux autres, le second au parallélépipède formé en menant par les six directrices des trois congruences autant de plans parallèles aux trois plans centraux des congruences elles-mêmes. Le Mémoire se termine par la considération des coordonnées tangentielles dans les complexes.

Ce court résumé des deux Mémoires du professeur Chelini n'a pas eu pour but d'en faire ressortir le mérite et d'en recommander la lecture aux jeunes géomètres, le nom de l'auteur étant largement suffisant pour atteindre ce but; mais plutôt de faire voir comment la théorie de la composition des droites, des aires et des points est d'une importance capitale, non-seulement parce que, en supposant que les droites représentent des forces ou des mouvements, elle fournit une solution géométrique des problèmes de la Mécanique rationnelle, et plus particulièrement de ceux qui sont relatifs aux mouvements de rotation, tels qu'ils ont été considérés par Chasles, mais aussi parce qu'elle peut être très-avantageusement prise pour base des diverses théories géométriques, les ramenant toutes aux mêmes principes, et établissant ainsi entre elles un lien rationnel

et mettant en évidence leurs relations intimes. Si j'ai atteint mon but, le lecteur voudra bien admettre cette assertion, qu'*il serait très-opportun d'introduire dans nos écoles une étude sérieuse et suffisamment étendue de la* Théorie de la composition des systèmes des quantités géométriques *comme fondement non-seulement de la Mécanique rationnelle, mais aussi des diverses théories géométriques, en faisant descendre celles-ci de la première comme d'une source commune.*

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

JOURNAL für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von C.-W. Borchardt.

T. 78; 1874.

Lipschitz (R.). — *Extension de la théorie des surfaces d'aire minimum.* (45 p.)

Les surfaces d'aire minimum ou les surfaces qui renferment la plus petite aire dans un contour donné quelconque sont identiques, d'après une remarque de Meusnier, à celles où s'annule en chaque point la somme des inverses des deux rayons de courbure principaux. Soient maintenant x_1, x_2, x_3 les coordonnées arbitraires d'un point dans l'espace; posons le carré de l'élément linéaire, à partir du point x_1, x_2, x_3, égal à la forme quadratique

$$2f(dx) = a_{11}dx_1^2 + a_{22}dx_2^2 + a_{33}dx_3^2 + 2a_{23}dx_2dx_3 + 2a_{31}dx_3dx_1 + 2a_{12}dx_1dx_2;$$

soit $y_1 =$ const. l'équation de la surface. Alors l'équation aux rayons principaux et l'expression de l'aire contenue dans un contour fermé ont la propriété de varier à mesure qu'on transforme arbitrairement la forme $2f(dx)$ par de nouvelles variables, et qu'on remplace l'équation $y_1 =$ const. par une équation quelconque équivalente; et l'invariant de cette combinaison, qui représente la somme des inverses des deux rayons de courbure principaux, devra s'évanouir lorsque l'aire d'une partie de la surface, limitée par un contour fermé, deviendra un minimum. L'extension

que M. Lipschitz fait de ces conditions se rapporte aux recherches dont il a lui-même donné l'analyse détaillée au tome IV du *Bulletin* (¹). Il se propose actuellement d'examiner si, dans la théorie des formes quadratiques de n différentielles, où l'on a

$$2f(dx) = \frac{1}{2}\sum_{a,b} a_{a,b}\, dx_a\, dx_b,$$

la relation entre les inverses des rayons de courbure principaux et les surfaces d'aire minimum se maintient quand on oppose à la fonction $\lambda(dx)$ (définie au *Bulletin*, t. IV, p. 301, éq. 12) une certaine intégrale multiple A, qui correspond à l'expression de l'aire d'une partie de la surface, et qui a la propriété d'être indépendante du choix des variables. En supposant la forme

$$f(dx) = \frac{1}{2}\sum_{a} dx_a^2$$

et le nombre des variables $= n - 1$, l'élément de l'intégrale A coïncide avec l'élément d'une autre, définie par M. Kronecker dans le premier Mémoire sur des systèmes de fonctions de plusieurs variables (*Monatsbericht der Berliner Akademie*, 1869), et que ce géomètre y a appelé l'élément de la variété $(n-1)^{\text{uple}}$ représentée par l'équation $y_1 =$ const. La théorie de la fonction $\lambda(dx)$ et de l'intégrale A fournit donc, en effet, à l'auteur une généralisation de la relation entre les rayons de courbure principaux et la propriété connue des surfaces d'aire minimum. Il conclut enfin en donnant une théorie complète et développée du cas spécial où l'intégrale multiple A devient une intégrale double.

MERTENS (F.). — *Contribution à la théorie analytique des nombres.* (17 p.)

On trouve, dans la *Théorie des nombres* de Legendre (3ᵉ édit., 1ʳᵉ Partie, § VIII), ces deux formules remarquables :

$$\sum \frac{1}{g} = l(lG - 0{,}08366) + C,$$

$$\prod\left(1 - \frac{1}{g}\right) = \frac{A}{lG - 0{,}08366},$$

(¹) Extrait de six Mémoires publiés dans le *Journal de Borchardt*, p. 97, etc.

où les signes $\sum$ et $\prod$ (de somme et de produit) s'étendent à tous les nombres premiers qui sont inférieurs à la limite donnée G, où l est le signe des logarithmes népériens, et où C, A désignent certaines constantes numériques inconnues. La valeur du nombre 0,08366 a été déterminée par une voie empirique, et dès lors peut paraître douteuse. Quand on l'omet, les deux équations indiquent que, pour de grandes valeurs de G, on peut poser, par approximation,

$$\sum \frac{1}{g} = llG + C,$$

$$\prod \frac{1}{1 - \frac{1}{g}} = C' lG.$$

C'est la forme que M. Tchebychef a donnée aux formules de Legendre dans un Mémoire où il en a aussi développé une démonstration. Cependant le procédé de M. Tchebychef n'est pas à l'abri de toute incertitude; c'est pourquoi M. Mertens cherche à en donner une nouvelle démonstration rigoureuse et à déterminer les constantes C et C'. Une analyse subtile, qui s'appuie sur les travaux analogues de Tchebychef, de Dirichlet et surtout d'Euler, lui fournit enfin ces valeurs

$$\sum_{2}^{G} \frac{1}{g} = llG + \mathfrak{C} - H + \delta,$$

$$\prod_{2}^{G} \frac{1}{1 - \frac{1}{g}} = e^{\mathfrak{C} + \delta'} lG,$$

où δ est toujours inférieur à

$$\frac{7}{l(G+1)} + \frac{2}{GlG}, \quad \text{et} \quad \delta' < \frac{4}{l(G+1)} + \frac{2}{GlG} + \frac{1}{2G};$$

$\mathfrak{C}$ est la constante connue 0,5772156649 et H une autre constante déterminée par l'auteur = 0,3157184520 5. Cette recherche ressemble, par sa méthode et ses principes, à une autre, entreprise par le même auteur au tome 77 du même Journal sur la valeur asymptotique de quelques fonctions dans la théorie des nombres. Aussi

M. Mertens résout-il encore un autre problème semblable à ceux qu'il a traités dans le Mémoire que nous venons de citer : c'est de trouver la valeur de la somme de tous les nombres premiers inférieurs à une limite donnée G et compris dans les formes respectives $4m+1$, $4m+3$, $a+mk$, où a et k n'ont pas de facteur commun.

SCHLÄFLI. — *Sur la possibilité générale de la représentation conforme, sur un demi-plan, d'une figure plane limitée par des droites.* (18 p.)

M. Christoffel a donné (*Annali di Matematica,* sér. 2, t. I) une expression intégrale pour une fonction u qui représente d'une manière conforme le demi-plan de la variable indépendante t sur une surface plane limitée par des droites. M. Schläfli a repris ce problème pour prouver qu'on peut toujours assigner aux constantes des valeurs tellement déterminées, qu'un polygone rectiligne quelconque donné u est représenté d'une manière conforme sur le demi-plan t, quand même la figure contiendrait à l'intérieur des points de ramification ou des horizons. La question des constantes n'a été abordée par M. Christoffel ni dans le Mémoire que nous venons de citer, ni dans un autre inséré dans les *Göttinger Nachrichten.* Les travaux plus généraux de M. Schwarz embrassent aussi notre problème comme cas spécial; cependant l'auteur a cru que ses recherches directes de la question ne sont pas pour cela dépourvues d'intérêt. Pour obtenir l'expression de u, il revient à des considérations présentées par M. Schwarz dans deux Mémoires antérieurs. N'oublions pas enfin de reproduire une remarque de M. Schläfli où il dit que ce sont MM. Schwarz et Casorati qui l'ont engagé à entreprendre ces recherches.

NETTO (E.). — *Sur la théorie des groupes composés.* (12 p.)

La théorie des groupes composés joue un rôle important dans celle des substitutions; M. Jordan lui a consacré plusieurs paragraphes dans son *Traité des substitutions,* et y est revenu dans des recherches ultérieures. M. Netto se propose de remplir quelques lacunes dans cette théorie récente et d'élucider quelques points restés obscurs jusqu'à présent.

REYE (Th.). — *Généralisation de la théorie des polaires de surfaces algébriques.* (17 p.)

Reye (Th.). — *Démonstration géométrique du théorème de Sylvester : Toute forme cubique quaternaire peut être représentée par la somme de cinq cubes de formes linéaires.* (9 p.)

Reye (Th.). — *Représentation des formes biquadratiques par la somme de dix bicarrés.* (7 p.)

Ces trois Mémoires sont étroitement liés : le premier développe une nouvelle théorie des polaires, les deux autres en font l'application à deux problèmes connus.

Les nouvelles recherches de M. Reye se rattachent aux idées qu'il a exposées dans le Mémoire *Sur les moments d'inertie et de degré supérieur d'un système de masses par rapport à un plan* (*Journal de Borchardt*, t. 72, p. 293; *Bulletin*, t. III, p. 145). C'est là qu'il définit le $n^{\text{ième}}$ moment, par rapport à un plan, d'un système (continu ou non) de points matériels par l'intégrale $\int r^n dm$ étendue à tous les points du système, et où r désigne la distance de la masse dm au plan. Si l'équation du plan, sous la forme normale, est $\alpha x + \beta y + \gamma z - p = 0$, on a

$$r_i = \alpha x_i + \beta y_i + \gamma z_i - p,$$

et la somme

$$\sum m_i(\alpha x_i + \beta y_i + \gamma z_i - p)^n = \text{const.},$$

ou bien l'intégrale équivalente, où les m_i sont supposés constants, les α, β, γ, p variables, dénote une surface de la classe n, si n est pair, de la classe $2n$, si n est impair; pour tous les plans tangents à cette surface, le $n^{\text{ième}}$ moment a une valeur constante. Si cette constante est nulle, l'auteur appelle la surface *surface nulle des* $n^{\text{ièmes}}$ *moments*, ou bien $n^{\text{ième}}$ *surface nulle* du système matériel.

Maintenant il remplace encore le plan P par une surface quelconque F^n d'ordre n. A cet effet, imaginons un point du système m_i, ayant pour coordonnées x_i, y_i, z_i; menons par m_i, à la surface F^n, une sécante suivant une direction fixe donnée; appelons $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ les n segments de cette sécante, comptés à partir du point m_i jusqu'aux points d'intersection de la surface F^n : alors la somme $\sum_i m_i\rho_1\rho_2\ldots\rho_n$, étendue à toutes les masses m_i du système, peut

être appelée *moment du système matériel* par rapport à la surface F^n. Mais, comme cette somme est proportionnelle à cette autre $\sum_i m_i F^n(x_i, y_i, z_i)$, $F^n(x, y, z) = 0$ étant l'équation de la surface, et que cette nouvelle somme est indépendante de la direction choisie au préalable, l'auteur définit la somme $\sum_i m_i F^n(x_i, y_i, z_i)$ comme *le moment du système matériel par rapport à la surface* F^n.

Si la surface F^n se décompose en une autre F^k et la $(n-k)^{\text{ième}}$ puissance d'un plan, son moment sera exprimé par la somme $\sum_i m_i F^k(x_i, y_i, z_i) . (\alpha x_i + \beta y_i + \gamma z_i - p)^{n-k}$, et l'on pourra la remplacer par les $(n-k)^{\text{ièmes}}$ moments d'un autre système matériel dont les masses M_i sont concentrées aux points (x_i, y_i, z_i) et ont les valeurs respectives $M_i = m_i . F^k(x_i, y_i, z_i)$. La $(n-k)^{\text{ième}}$ surface nulle de ce nouveau système matériel, partant la surface de la $(n-k)^{\text{ième}}$ classe représentée par l'équation

$$\sum_i m_i F^k(x_i, y_i, z_i)(\alpha x + \beta y + \gamma z - p)^{n-k} = 0,$$

sera appelée la *polaire de la surface* F^k *d'ordre k par rapport à l'autre surface de* $n^{\text{ième}}$ *classe*

$$\sum_i m_i(\alpha x_i + \beta y_i + \gamma z_i - p)^n = 0.$$

Cette dernière surface est la $n^{\text{ième}}$ surface nulle d'un système matériel. On peut donc aussi définir la polaire de F^k par cette proposition : Si l'on élève l'ordre d'une surface d'ordre k à l'ordre n en y joignant $n-k$ fois un plan tangent de sa polaire, le moment du système matériel par rapport à la surface d'ordre n sera nul. La nouvelle théorie des polaires est, en effet, une généralisation de l'ancienne : la polaire devient identique à celle d'un groupe de k points si la surface F se réduit à ces points.

Un intérêt particulier s'attache aux surfaces de $k^{\text{ième}}$ ordre, telles que *toutes* les valeurs des α, β, γ, p satisfassent à l'équation de leur polaire ; alors elles n'ont plus de polaires distinctes : une surface quelconque de la $(n-k)^{\text{ième}}$ classe en peut être regardée comme une polaire. Dans ce cas, l'auteur dit que la surface F^k est *apolaire*

à la surface $\sum_i m_i(\alpha x_i + \beta y_i + \gamma z_i - p) = 0$ de $n^{\text{ième}}$ classe. Une surface F^n entraîne toutes ses surfaces apolaires ; mais, réciproquement, ce n'est qu'un certain nombre de ces surfaces qui servent à déterminer F^n. Et voilà le point de départ pour des recherches spéciales auxquelles sont consacrés surtout les deux derniers Mémoires.

Meyer (O.-E.). — *Sur la théorie du frottement intérieur.* (7 p.)

Si l'on suppose qu'une force qui sollicite un corps élastique ait besoin d'un certain temps pour parcourir la distance entre deux points du corps, ou que la cause et l'effet ne coïncident pas au même instant, cette hypothèse influencera la théorie de l'élasticité : on obtient des formules qui se distinguent des expressions connues par des termes qui, comme le fait voir leur forme, tiennent compte du frottement intérieur du milieu élastique. Cette considération donne lieu à une nouvelle déduction théorique des équations différentielles pour le frottement intérieur ; il se présente ici comme un manque de parfaite élasticité provenant d'un retard de temps. M. Meyer remplace par cette nouvelle analyse une autre qu'il avait donnée au tome 59 du même Journal, et dont il ne reconnaît plus la validité.

Aron (H.). — *L'équilibre et le mouvement d'une calotte élastique infiniment mince et douée d'une courbure quelconque.* (39 p.)

Dans ce Mémoire, M. Aron établit les équations différentielles qui régissent l'équilibre et le mouvement de surfaces courbes quelconques, ou bien de calottes élastiques très-minces qui peuvent subir des déformations finies, mais dont les éléments ne permettent que des dilatations infiniment petites, ce qui est la seule hypothèse de l'élasticité ; après cela, il aborde aussi le cas des glissements infiniment petits. Élève de M. Kirchhoff, il a presque exclusivement utilisé les travaux et les leçons de son maître. Voici les sources où il a puisé les idées de ses méthodes :

Kirchhoff. — Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastichen Scheibe (*Crele's Journ.*, t. 40).

Kirchhoff. — Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung eines unendlich dünnen elastichen Stabes (même recueil, t. 56).

Dans le second Mémoire, M. Kirchhoff a déjà remarqué (p. 308) que la théorie de l'équilibre et du mouvement d'une plaque élastique infiniment mince pourrait être développée d'une manière plus précise qu'il ne l'avait fait dans le premier, par une voie semblable à celle qu'il a prise dans le second, et que cette voie se prête même au cas où la plaque a une élasticité variant avec la direction. Conformément à ces indications, M. Gehring présenta, en 1860, à la Faculté de Philosophie de Berlin une dissertation inaugurale qui traite de l'équilibre et du mouvement des plaques très-minces susceptibles de petites déformations, en admettant en même temps une structure cristalline des plaques. Enfin Clebsch, tout en adoptant les méthodes de M. Kirchhoff, donne, dans son livre sur la *Théorie de l'élasticité,* les équations pour les déformations finies de plaques minces dont les éléments ne subissent que des dilatations infiniment petites, équations d'où découlent aussi les glissements infiniment petits. M. Aron vient donc de continuer la série de ces recherches, en y ajoutant la courbure des plaques.

Frobenius (G.). — *Sur l'échange de l'argument et du paramètre dans les intégrales des équations différentielles linéaires.* (4 p.)

Milinowski. — *Deux produits géométriques d'éléments curvilignes.* (2 p.)

Soient C^n et C^n_1 deux courbes d'ordre n; on établit entre les points de ces courbes une homographie telle, qu'à un point de C^n corresponde un seul point de C^n_1. Il s'agit de trouver l'ordre et la classe de la courbe engendrée par les droites qui joignent deux points correspondants.

Milinowski. — *Sur la Géométrie des courbes de troisième ordre.* (46 p.)

Dans un Mémoire inséré au tome 47 du même Journal et intitulé : *Propriétés générales des courbes algébriques,* Steiner a énoncé une série de théorèmes sans démonstrations. M. Milinowski en démontre une partie, en tant qu'ils se rapportent aux courbes de troisième ordre. Ses méthodes, empruntées à la Géométrie synthétique, s'appliquent quelquefois aussi à des courbes d'un ordre supérieur, et l'auteur a signalé des exemples de cette généralisation

dans quelques endroits; mais, dans la plupart des cas, ses démonstrations se refusent à une extension : c'est que la courbe polaire harmonique d'un point par rapport à une courbe de troisième ordre est du même ordre, tandis qu'en général l'ordre de la polaire harmonique est différent de celui de la courbe donnée.

Thomé (L.-W.). — *Sur la théorie des équations différentielles linéaires* (suite de Mémoires publiés aux tomes 74, 75 et 76 du même Journal). (22 p.)

L'auteur fait l'application de ses recherches antérieures sur ce sujet à des équations différentielles dont les coefficients sont rationnels. Les valeurs de la variable indépendante x pour lesquelles les coefficients ne restent pas finis, et la valeur $x = \infty$, si, après la substitution de $x = t^{-1}$, les coefficients ne restent pas finis pour $t = 0$, s'appellent *points singuliers* de l'équation différentielle. Si, pour tous les points singuliers qui ne sont pas à l'infini, l'équation d'ordre m a le même indice caractéristique (*Bulletin*, t. IV, p. 238) $h > 0$, et pour $x = t^{-1}$, $t = 0$ l'indice caractéristique $\overline{\gtrless} h$, on peut demander quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation différentielle d'ordre m contienne les intégrales d'une équation différentielle d'ordre $m - h$ qui ne possède pas d'autres points singuliers que l'équation donnée et dont les intégrales soient toutes régulières. M. Thomé trouve les coefficients rationnels de cette nouvelle équation différentielle en les décomposant en fractions simples, qui se déterminent alors séparément. La question finale de voir si les intégrales de cette équation différentielle sont comprises parmi celles de l'équation donnée ne demande que les opérations qui se présentent quand on différentie des fonctions rationnelles.

Lipschitz (R.). — *Réduction du mouvement d'un ellipsoïde liquide homogène au problème de variation d'une intégrale simple, et détermination du mouvement pour le cas limite d'un cylindre elliptique infini.* (28 p.)

Helmholtz (H.). — *Sur la théorie de l'Électrodynamique* (3e Mémoire). *Les forces de l'Électrodynamique dans des corps conducteurs en mouvement.* (52 p.)

Le premier Mémoire (t. 72) traite des phénomènes électrodynamiques dans des corps conducteurs au repos; dans ce cas, les

effets se réduisent à l'induction de forces électromotrices, et la recherche théorique en paraissait en quelque sorte assez simple, parce que le mouvement électrique qui existe représente nécessairement une certaine quantité de travail, c'est-à-dire qu'il a un potentiel et que la valeur de ce potentiel pouvait être considérée comme bien connue pour des conducteurs fermés. La grandeur qui indique, comme la force vive de masses pondérables, la quantité d'énergie correspondant au mouvement de l'électricité, et qu'on peut donc nommer, avec M. Cl. Maxwell, l'*énergie actuelle du mouvement électrique,* est égale à la valeur négative du potentiel électrodynamique défini par M. F. Neumann père, et c'est aussi le sens attaché en général par M. Helmholtz à l'expression du mot dans le premier Mémoire. Cette notion, employée sans aucun égard aux phénomènes qui découlent du mouvement des conducteurs, n'est donc pas atteinte par les objections qui ont été faites par plusieurs géomètres et physiciens contre une application plus étendue aux forces motrices exercées mutuellement par des conducteurs de courants électriques (*forces pondéromotrices,* d'après la nomenclature expressive de M. C. Neumann fils). C'est une autre signification du potentiel électrodynamique qui n'est pas nécessairement unie à celle que nous venons de mentionner; mais c'est elle qui s'est développée la première et qui a déterminé la terminologie. Dans ce sens, le potentiel électrodynamique donne l'énergie potentielle des forces pondéromotrices d'origine électrodynamique, et le travail produit par les forces par suite d'un déplacement des corps conducteurs, les intensités des courants restant toujours invariables, équivaut à la différence dont la valeur du potentiel a diminué pendant le déplacement.

M. Helmholtz s'est donc proposé cette fois de rechercher si la notion primitive du potentiel électrodynamique comme potentiel des forces pondéromotrices est admissible vis-à-vis des faits connus. Suivant M. C. Neumann, il appelle *loi du potentiel des forces électrodynamiques pondéromotrices* l'hypothèse qui dit que les forces pondéromotrices d'origine électrodynamique ont un potentiel si l'intensité de tous les courants électriques reste constante dans les fils conducteurs matériels. Quand on se donne la valeur du potentiel et que l'on pose l'hypothèse que la grandeur et la direction des forces pondéromotrices sont indépendantes des dépla-

cements virtuels ou actuels des éléments conducteurs, la grandeur de ces forces est parfaitement déterminée.

Comme la loi d'Ampère embrasse tous les faits qui portent sur la grandeur des forces pondéromotrices exercées par deux ou plusieurs courants fermés, il faudra prouver que, si l'on calcule les forces pondéromotrices qui dérivent de la loi du potentiel, on obtient exactement les mêmes valeurs qui s'ensuivent de la loi d'Ampère, les éléments conducteurs étant supposés flexibles, dilatables et capables de se déplacer à un degré quelconque. Cette preuve a été donnée par M. F. Neumann pour le cas des corps conducteurs linéaires, de forme et de grandeur invariables; il fallait alors cette restriction, parce que la théorie des courants dans des conducteurs à trois dimensions n'avait pas encore été créée; à présent, il est possible d'aborder aussi le cas général. Mais, quoique les deux lois (la loi potentielle et celle d'Ampère) soient tout à fait d'accord pour des courants fermés, elles montrent un désaccord marqué dans les effets pondéromoteurs de courants non fermés; car, si la loi du potentiel subsiste aussi pour les courants non fermés, il faut qu'il y ait : 1° outre les forces d'Ampère entre les éléments des courants, encore des forces attractives et répulsives; 2° entre les éléments et les bouts des courants, et 3° entre les extrémités des courants. M. Helmholtz discute ces relations au paragraphe 15 (les numéros font suite à ceux des deux premiers Mémoires) pour des conducteurs linéaires qui ne se ramifient pas; au paragraphe 16, pour des corps conducteurs à trois dimensions; au paragraphe 17, il montre comment il faut traiter les expressions analytiques pour des endroits où les éléments des conducteurs peuvent glisser. Comme il n'y a pas encore d'expériences directes sur les forces pondéromotrices d'origine électrodynamique qui se présentent aux extrémités des courants, il restait seulement à démontrer que la loi du potentiel satisfait à la loi de la constance de l'énergie quand on l'applique à des conducteurs de forme variable. A cet effet, l'auteur développe au paragraphe 18 les expressions analytiques pour l'induction électrodynamique provenant du mouvement de corps conducteurs à trois dimensions, et au paragraphe 19 il prouve la constance de l'énergie; enfin, au paragraphe 20, il a cherché à résoudre cette question : Quels écarts de la loi du potentiel pourrait-on établir dans les valeurs des forces

électromotrices et induites par le mouvement sans déroger à la loi de la conservation de la force vive et sans changer les effets pondéromoteurs de courants fermés ?

Nous avons évité d'entrer dans la discussion des points de la théorie qui ont provoqué de vives objections de la part de MM. Bertrand, Neumann fils et Riecke. M. Helmholtz a amplement répondu à ses adversaires scientifiques; mais la question est si délicate que nous avons préféré donner un sommaire du travail et renvoyer le lecteur, pour plus de détails, au Mémoire.

HERMITE (Ch.). — *Extrait d'une Lettre à M. Borchardt sur la transformation des formes quadratiques ternaires en elles-mêmes.* (4 p., fr.)

LIPSCHITZ (R.). — *Démonstration d'un théorème de la théorie de l'élasticité.* (9 p.)

Le mouvement des parties d'un corps solide élastique qui n'est pas sollicité par des forces extérieures se détermine à l'aide de l'équation

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\iiint \rho\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,\delta u + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\,\delta v + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\,\delta w\right) dx\,dy\,dz \\ &\qquad\qquad + \iiint \delta\,\mathrm{F}\,dx\,dy\,dz = 0. \end{aligned}\right.$$

La fonction F est une fonction homogène du second degré par rapport aux quantités

$$(2)\quad \frac{\partial u}{\partial x},\quad \frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial w}{\partial z},\quad \frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y},\quad \frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z},\quad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Le produit de la fonction F et de l'élément de volume $dx\,dy\,dz$ peut être regardé comme la mesure du travail produit par la déformation de ce volume, et M. Kirchhoff a déjà énoncé l'assertion que cette fonction n'est jamais négative pour tous les corps qu'il y a au monde, et qu'elle ne s'évanouit qu'avec l'ensemble des six arguments (2). Cette même assertion se trouve reproduite dans le *Treatise on Natural Philosophy* de MM. Thomson et Tait. Maintenant M. Lipschitz fait faire à cette proposition un progrès remarquable; car il montre que, si l'on suppose que les parties d'un corps solide élastique qui n'est pas sollicité de forces extérieures soient ébran-

lées dans chaque perturbation de l'équilibre de manière que le mouvement porte le caractère de stabilité, la fonction F possède nécessairement la propriété mentionnée.

Fuchs (L.). — *Sur la représentation à l'aide de fonctions algébriques* (supplément du Mémoire, t. 77, p. 339 du même Journal). (2 p.)

Stern. — *Sur la valeur de quelques intégrales.* (5 p.)

Détermination directe de la valeur de quelques intégrales signalées par M. Hermite dans son *Cours d'Analyse*, p. 260.

Reye (Th.) — *Sur les surfaces sphériques qu'on peut circonscrire aux tétraèdres polaires d'une surface du second degré.*

Toutes les sphères qu'on peut circonscrire aux tétraèdres polaires d'un ellipsoïde ou d'un hyperboloïde sont coupées orthogonalement par une sphère concentrique à la surface respective. Les centres de toutes les sphères qu'on peut circonscrire à un paraboloïde sont situés dans un plan normal à l'axe principal. E. L.

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATHEMATIKY A FYSIKY (1).

T. II; 1873.

Studnička (F.-J.). — *Nicolas Copernic.* (56 p., avec portrait.)

Cet article a été rédigé à l'occasion du 400e anniversaire de la naissance du grand astronome. Ce qui donne un intérêt particulier à cet écrit, c'est que l'auteur y fait voir que les ancêtres de Nicolas Copernic descendaient d'une famille noble bohème. Voici la traduction de quelques passages relatifs à ce sujet :

« Les renseignements que nous possédons sur l'origine et sur la vie de Copernic n'offrent pas toute la précision que l'on pourrait désirer sur une question de si haut intérêt.

» Il est néanmoins avéré (2) qu'au xive siècle il existait en

---

(1) Voir *Bulletin*, t. VI, p. 88.

(2) « En 1831, M. Palacký écrivait, dans le *Journal du Musée national*, à Prague, p. 435 :

« Des recherches assidues, faites par les savants polonais sur la famille du célèbre

Bohême des seigneurs (*vladykové*) de Koprník, qu'on trouve mentionnés dans des documents du xve et du xvie siècle. Cette famille noble résidait à Koprník, village qui existe encore aujourd'hui entre Knězmost, Kosmonosy et Bakov, au nord-ouest de Prague. On voit de plus, dans les *Acta consularia Cracoviensia,* qu'en 1396 Mikuláš Koprník *fut reçu citoyen de Cracovie,* et, à cette occasion, il fut certifié, par le témoin Dambrova, qu'il était *originaire de Bohême.*

» astronome Nicolas Copernic, il résulte que ses parents sont partis de Cracovie pour » aller se fixer à Thorn (Toruň); mais Cracovie n'était point le lieu d'origine de cette » famille, et, d'après certains indices, les historiens polonais ont été conduits à penser » que cette famille y était venue de Bohême. On s'est alors enquis s'il ne se rencontrait » pas dans ce dernier pays quelque chose pouvant rappeler les Copernic, ou s'il n'était » pas possible de retrouver leurs armes. La réponse à cette question se trouve dans les » *Misc. hist. r. Boh.*, Dec. I, Lib. V, p. 239 (Prague, 1683), dans les Extraits tirés des » Livres du Chapitre de Prague, intitulés *Libri Erectionum*, vol. XII, lit. D. 10 : « *Laneus* » *emtus pro ecclesia in Kosmanos a Nicolao plebano ecclesiæ prædictæ, decano Boles-* » *laviensi, ab honesta matrona Elsska conthorali Martini, dicti Zly, clientis de Stakor* » *seu de Borzejov cum ejus consensu, et fratris ejus Bohunkonis plebani ecclesiæ in* » *Sezemicz, anno* 1391, 25. *oct. Sigillum Martini et Bohunkonis galeæ super galeas* » *figura navis, hoc est arma natalitia personarum, scilicet Martini et Bohunkonis. In* » *tertio sigillo Wilhelmi de Zwierzeticz clypeus bipartitus et supra clypeum galea cum* » *duabus alis* « : *S. Wilhelmi de Lemberg, dicti de Zwierzeticz* ». *In quinto humana* » *imago securim in manibus tenens :* « S. Udalrici de Koprník ». *In sexto galea, super* » *quam caput hirci cornuti erat sculptum :* « *S. Joannis dicti Lulak de Stakorecz* ». » 1391, 25 oct.

» Voilà une preuve certaine et saisissante de l'existence d'une famille noble bohême » du nom de *Koprník*, mais dont il a été impossible à Balbin et à moi de retrouver » aucune autre trace dans les Mémoires postérieurs du xve et du xvie siècle. Il est vrai- » semblable, d'après cela, que les Koprník quittèrent la Bohême vers la fin du xive siècle » ou au commencement du xve, pour s'établir à Cracovie, les relations entre la Pologne » et la Bohême, et, en particulier, entre les villes de Cracovie et de Prague étant alors » beaucoup plus fréquentes et plus étroites qu'à aucune autre époque. C'est aux savants » polonais à examiner si les temps s'accordent. Le doute disparaîtrait entièrement si l'on » venait à découvrir que Nicolas Copernic avait les mêmes armes que nos seigneurs de » Koprník, c'est-à-dire qu'il portait sur son blason un *homme à hache*. Le village de » *Koprník* se trouve encore aujourd'hui dans le district (*kraj*) de Boleslav, entre » Knězmost et Kosmonosy; il n'est pas douteux que c'était là la résidence de ces » seigneurs, qui, à la vérité, appartenaient à la petite noblesse bohême. »

» Quant aux armes de Nicolas Copernic, on a reconnu qu'elles contenaient aussi un homme; mais quelques-uns l'ont pris pour Apollon. Julian Bartoszewicz, dans la biographie étendue qu'il a composée pour l'édition des *OEuvres de Copernic*, publiée, en 1854, par J. Barovski, n'en fait aucune mention; il suppose que la famille de Copernic était polonaise, et originaire du bourg de Koprník (*) en Silésie; mais il n'en fournit point la preuve. »

(*) Aujourd'hui Köpprich, près Frankenstein.

» Enfin les armes des Koprník tchèques ressemblent à celles que portait l'illustre astronome; dans celles-ci se trouvait *un homme*, que quelques-uns ont pris, on ne sait comment, pour Apollon; les nobles tchèques du même nom, comme leurs parents les *Vanžura* de Řehnic, dont la famille s'est éteinte il n'y a pas longtemps, avaient dans leurs armes *un homme portant une hache*.

» En considérant ces trois circonstances et les relations très-intimes qui existaient à cette époque entre la Pologne et la Bohême, et spécialement entre Cracovie et Prague, il est impossible de douter que, vers la fin du XIVe siècle, le seigneur de Koprník n'ait quitté la Bohême pour aller habiter Cracovie, et qu'il n'ait été reçu, en 1396, citoyen de cette ville. Ainsi devient évidente l'*origine bohême des Koprník polonais*.

» Les orthographes diverses du nom de Copernic : *Koppernick*, *Koppirnig*, etc., ne prouvent rien, les noms propres n'ayant pas dans ce temps-là d'orthographe fixe. Cette circonstance, au contraire, ne fait que confirmer notre opinion, parce que le nom de *Koprník*, qui n'est pas polonais, n'est pas aussi facile à prononcer pour les Polonais que pour les Tchèques. La forme latine *Copernicus*, dont il se servait lui-même suivant l'usage du temps, tire évidemment son origine du mot tchèque *Koprník*, par lequel nous le désignons, et qui a pour racine le mot *kopr* (= douille). »

Studnička (F.-J.). — *Sur l'esprit mathématique, et sur quelques-uns de ses caractères*. (8 p.)

Dans ce discours, prononcé lors de la première réunion de la *Société Mathématique* dans l'année scolaire 1872-1873, l'auteur rappelle les trois remarques suivantes :

S'il s'agit de traduire en langage mathématique une proposition quelconque, ou, réciproquement, de présenter, sous la forme ordinaire, un résultat obtenu par la voie du calcul, il faut prendre le plus grand soin pour que ces traductions soient exactes.

La démonstration d'un théorème devient d'autant plus courte qu'on se sert de théorèmes plus voisins du théorème proposé.

Toutes les démonstrations d'un même théorème sont, au fond, également longues, c'est-à-dire qu'elles exigent finalement le même travail de l'esprit.

L'auteur développe un nombre suffisant d'exemples pour faire bien saisir la portée de ces trois remarques.

WEYR (Em.). — *Sur les coniques et leurs cercles osculateurs.* (4 p.)

On donne aux coordonnées des points d'une conique la forme de fonctions rationnelles d'un *paramètre*. A l'aide de ce paramètre, on démontre facilement diverses propositions relatives à plusieurs points situés sur la conique, et, en particulier, ce théorème de Steiner : « Par chaque point d'une conique passent trois cercles, qui osculent la conique en d'autres points ; leurs points de contact et le point considéré se trouvent sur un même cercle. »

STUDNIČKA (F.-J.). — *Application géométrique de quelques théorèmes sur les déterminants.* (4 art. ; 23 p.)

Dans cet article, qui s'adresse aux commençants, l'auteur résout plusieurs problèmes relatifs au triangle et au tétraèdre, en faisant partout usage de la théorie des déterminants.

STUDNIČKA (F.-J.). — *Démonstration directe de la formule d'interpolation de Lagrange.* (2 p.)

STUDNIČKA (F.-J.). — *Sur la capitalisation continue de l'intérêt.* (1 p.)

Supposons l'année divisée en α parties égales, et qu'au bout de chacun de ces intervalles les intérêts du capital K_0, à p pour 100, soient joints au capital ; le capital deviendra, au bout de n années,

$$K_n = K_0 \left(1 + \frac{p}{100\alpha}\right)^{\alpha n}.$$

On obtient la capitalisation continue pour $\lim \alpha = \infty$, ce qui donne

$$K_n = K_0 e^{\frac{np}{100}}.$$

HERVERT (J.). — *Sur la force électromotrice.* (5 p.)

LOŠŤÁK (J.) — *Sur la désignation des poids et mesures métriques.* (2 p.)

Le système métrique des poids et mesures devant être introduit officiellement en Autriche à partir du 1er janvier 1876, l'auteur propose les désignations abrégées *m.*, *a.*, *l.*, etc., pour *mètre, are, litre,* etc. ; D., H., K., M. pour *déca, hecto,* etc. ; *d.*, *c.*, *m.* pour *déci, centi, milli.*

WEYR (Em.). — *Détermination des éléments à l'infini dans les figures géométriques de l'espace.* (13 p.)

Suite du Mémoire intitulé : « Détermination des éléments à l'infini des figures géométriques planes [1] ». A l'aide des coordonnées homogènes dans l'espace, de Hesse, l'auteur développe la notion du plan à l'infini dans l'espace, et, après avoir considéré les plans et les droites parallèles, il passe à la détermination des points à l'infini des courbes dans l'espace (particulièrement les courbes rationnelles) et des courbes à l'infini des surfaces (particulièrement des surfaces du second degré). Il termine par la considération du cercle sphérique imaginaire à l'infini.

Seydler (A.). — *Sur le rayonnement de la chaleur dans différents milieux.* (14 p.)

Dans le huitième Mémoire de son Ouvrage bien connu sur la *Théorie mécanique de la Chaleur*, Clausius démontre cette proposition, que le pouvoir émissif d'un corps est en raison inverse du carré de la vitesse avec laquelle a lieu le rayonnement, ou en raison directe du carré de l'indice de réfraction du milieu dans lequel le corps rayonne. Clausius fonde sa démonstration sur ce théorème, que le rayon décrit sa route dans le moindre temps possible; il a, de plus, invoqué d'autres théorèmes de Physique supérieure, ce qui a rendu la démonstration très-générale et très-élégante, mais non accessible à tous les lecteurs. A cause de la grande importance du théorème en question, l'auteur du présent Mémoire a tenté d'en donner une démonstration plus élémentaire et plus facile à saisir. La quantité de chaleur qu'un élément superficiel d'un corps envoie à un autre élément est proportionnelle au pouvoir émissif, à la grandeur de l'élément superficiel, et à l'ouverture du cône de rayons partant du premier élément et ayant pour base le second. En calculant d'après cela cette quantité de chaleur, on parvient finalement au théorème ci-dessus.

La fin du Mémoire traite de quelques cas où un examen superficiel, même fondé sur le théorème en question, pourrait faire croire que la chaleur peut passer sans compensation d'un corps plus froid à un corps plus chaud. (*A suivre.*) E. W.

---

(1) Voir *Bulletin*, t. VI, p. 93.

MÉLANGES.

MÉMOIRE SUR LES INTÉGRALES DÉFINIES, PRISES ENTRE DES LIMITES IMAGINAIRES ([1]);

Par M. A.-L. CAUCHY.

1. Dans un Mémoire présenté à l'Académie des Sciences le 28 octobre 1822, ainsi que dans le 19e Cahier du *Journal de l'École royale Polytechnique*, et dans le résumé des Leçons données à cette École, j'ai fait voir comment on pouvait parvenir à fixer, dans tous les cas possibles, le sens que l'on doit attacher à la notation

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx,$$

destinée à représenter une intégrale définie, prise entre des limites réelles x_0, X, quelle que fût d'ailleurs la fonction, réelle ou imaginaire, désignée par $f(x)$. J'ai prouvé qu'une intégrale de cette espèce, lorsque la fonction $f(x)$ devient infinie entre les limites de l'intégration, est en général indéterminée, en sorte qu'elle admet une infinité de valeurs, parmi lesquelles il en existe une qui mérite une attention particulière, et que j'ai nommée *valeur principale*. Enfin j'ai montré que la considération des valeurs principales des intégrales indéterminées, jointe à la théorie des *intégrales singulières* que j'avais exposée pour la première fois dans un Mémoire de 1814, suffisait pour établir une multitude de formules générales, à l'aide desquelles on pouvait évaluer ou du moins transformer les intégrales définies. Je me propose aujourd'hui d'appliquer les principes qui m'ont guidé dans ces recherches aux intégrales prises entre des limites imaginaires. On sait que l'emploi de ces dernières intégrales a conduit M. Laplace à des résultats dignes de remarque. Dans ces derniers temps, M. Brisson nous a dit s'être servi avec

---

([1]) Nous croyons être agréable à nos lecteurs en réimprimant ici ce Mémoire devenu si rare, et qui compte parmi les plus beaux de Cauchy. Si cette publication est bien accueillie, nous donnerons aussi le Mémoire *Sur les rapports qui existent entre le Calcul des résidus et le Calcul des limites,* qui a été tiré *en français* à un très-petit nombre d'exemplaires.

succès de ces mêmes intégrales et de leur transformation en intégrales définies ordinaires, pour développer des fonctions données en séries composées de termes proportionnels à des exponentielles dont les exposants suivent des lois connues. Enfin un jeune Russe, doué de beaucoup de sagacité et très-versé dans l'Analyse infinitésimale, M. Ostrogradsky, ayant aussi recours à l'emploi de ces intégrales et à leur transformation en intégrales ordinaires, a donné une démonstration nouvelle des formules que j'ai précédemment rappelées, et généralisé d'autres formules que j'avais présentées dans le 19e Cahier du *Journal de l'École royale Polytechnique*. M. Ostrogradsky a bien voulu nous faire part des résultats principaux de son travail. Mais ni ce travail, ni aucun des Mémoires publiés jusqu'à ce jour, sur les diverses branches du Calcul intégral, n'ont fixé le degré de généralité que comporte une intégrale définie, prise entre des limites imaginaires, et le nombre des valeurs qu'elle peut admettre. Telle est la question qui va faire l'objet de nos recherches. On verra que sa solution dépend du calcul des variations et de la théorie des intégrales singulières, et qu'elle fournit immédiatement un grand nombre de formules propres soit à l'évaluation, soit à la transformation des intégrales définies. Ces formules comprennent, comme cas particuliers, celles que j'ai déjà mentionnées, et celles que quelques géomètres ont obtenues depuis peu par d'autres voies.

2. Pour fixer généralement le sens de la notation

$$(1) \qquad \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx,$$

x_0, X désignant des limites réelles, et $f(x)$ une fonction réelle ou imaginaire de la variable x, il suffit de considérer l'intégrale définie représentée par cette notation comme équivalente à la limite ou à l'une des limites vers lesquelles converge la somme

$$(2) \quad (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \ldots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1}),$$

lorsque les éléments de la différence $X - x_0$ savoir,

$$(3) \qquad x_1 - x_0, \quad x_2 - x_1, \ldots, \quad X - x_{n-1},$$

étant des quantités affectées du même signe que cette différence,

reçoivent des valeurs numériques de plus en plus petites. Donc, pour embrasser dans la même définition les intégrales prises entre des limites réelles et les intégrales prises entre des limites imaginaires, il convient de représenter par la notation

$$\int_{x_0+y_0\sqrt{-1}}^{X+Y\sqrt{-1}} f(z)dz \tag{4}$$

la limite ou l'une des limites vers lesquelles converge la somme des produits de la forme

$$\left\{\begin{array}{l} [(x_1-x_0)+(y_1-y_0)\sqrt{-1}]f(x_0+y_0\sqrt{-1}), \\ [(x_2-x_1)+(y_2-y_1)\sqrt{-1}]f(x_1+y_1\sqrt{-1}), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ [(X-x_{n-1})+(Y-y_{n-1})\sqrt{-1}]f(x_{n-1}+y_{n-1}\sqrt{-1}), \end{array}\right. \tag{5}$$

lorsque, chacune des deux suites

$$\left\{\begin{array}{l} x_0, \ x_1, \ x_2, \dots, \ \ x_{n-1}, \ X, \\ y_0, \ y_1, \ y_2, \dots, \ \ y_{n-1}, \ Y \end{array}\right. \tag{6}$$

étant composée de termes qui aillent toujours en croissant ou en décroissant depuis le premier jusqu'au dernier, ces mêmes termes se rapprochent indéfiniment les uns des autres, et que leur nombre croît de plus en plus. Pour obtenir deux suites de cette espèce, il suffit de supposer

$$x=\varphi(t), \quad y=\chi(t), \tag{7}$$

$\varphi(t)$, $\chi(t)$ étant deux fonctions continues d'une nouvelle variable t, toujours croissantes ou décroissantes depuis $t=t_0$, jusqu'à $t=T$, et assujetties à vérifier les conditions

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi(t_0)=x_0, \quad \chi(t_0)=y_0, \\ \varphi(T)=X, \quad \chi(T)=Y; \end{array}\right. \tag{8}$$

puis de représenter par

$$\begin{array}{l} x_0, \ x_1, \ x_2, \dots, \ \ x_{n-1}, \ X, \\ y_0, \ y_1, \ y_2, \dots, \ \ y_{n-1}, \ Y \end{array}$$

les valeurs de x et de y correspondant à des valeurs de t, qui

composent une série croissante ou décroissante et de la forme

$$(9)\qquad t_0,\ t_1,\ t_2, \ldots,\ t_{n-1},\ \mathrm{T}.$$

Admettons cette hypothèse, et désignons par $A + B\sqrt{-1}$ la valeur correspondante de l'intégrale (4) : on aura, à très-peu près,

$$(10)\quad \left\{\begin{array}{ll} x_1 - x_0 = (t_1 - t_0)\varphi'(t_0), & y_1 - y_0 = (t_1 - t_0)\chi'(t_0), \\ x_2 - x_1 = (t_2 - t_1)\varphi'(t_1), & y_2 - y_1 = (t_2 - t_1)\chi'(t_1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mathrm{X} - x_{n-1} = (\mathrm{T} - t_{n-1})\varphi'(t_{n-1}), & \mathrm{Y} - y_{n-1} = (\mathrm{T} - t_{n-1})\chi'(t_{n-1}), \end{array}\right.$$

et par conséquent l'expression imaginaire $A + B\sqrt{-1}$ sera sensiblement égale, en vertu des principes ci-dessus établis, à la somme des produits

$$(11)\quad \left\{\begin{array}{l} (t_1 - t_0)\left[\varphi'(t_0) + \sqrt{-1}\,\chi'(t_0)\right] f\left[\varphi(t_0) + \sqrt{-1}\,\chi(t_0)\right], \\ (t_2 - t_1)\left[\varphi'(t_1) + \sqrt{-1}\,\chi'(t_1)\right] f\left[\varphi(t_1) + \sqrt{-1}\,\chi(t_1)\right], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\mathrm{T} - t_{n-1})\left[\varphi'(t_{n-1}) + \sqrt{-1}\,\chi'(t_{n-1})\right] f\left[\varphi(t_{n-1}) + \sqrt{-1}\,\chi(t_{n-1})\right], \end{array}\right.$$

ou, ce qui revient au même, à l'intégrale définie

$$\int_{t_0}^{\mathrm{T}} \left[\varphi'(t) + \sqrt{-1}\,\chi'(t)\right] f\left[\varphi(t) + \sqrt{-1}\,\chi(t)\right] dt.$$

On aura donc

$$(12)\quad A + B\sqrt{-1} = \int_{t_0}^{\mathrm{T}} \left[\varphi'(t) + \sqrt{-1}\,\chi'(t)\right] f\left[\varphi(t) + \sqrt{-1}\,\chi(t)\right] dt;$$

et si l'on fait, pour abréger,

$$(13)\qquad \varphi'(t) = x',\quad \chi'(t) = y',$$

on trouvera simplement

$$(14)\quad A + B\sqrt{-1} = \int_{t_0}^{\mathrm{T}} (x' + y'\sqrt{-1})\, f(x + y\sqrt{-1})\, dt.$$

3. Concevons maintenant que la fonction $f(x + y\sqrt{-1})$ reste finie et continue, toutes les fois que x reste compris entre les

limites x_0, X, et y entre les limites y_0, Y. Dans ce cas particulier, on prouvera facilement que *la valeur de l'intégrale* (4), c'est-à-dire l'expression imaginaire $A + B\sqrt{-1}$, *est indépendante de la nature des fonctions*

$$x = \varphi(t), \quad y = \chi(t).$$

En effet, si l'on attribue à ces fonctions des accroissements infiniment petits et de la forme

$$(15) \qquad \varepsilon u, \quad \varepsilon v,$$

ε désignant un nombre que l'on supposera infiniment petit du premier ordre, et u, v deux fonctions nouvelles de la variable t, qui devront s'évanouir pour les deux limites $t = t_0$, $t = T$, l'intégrale (12) ou (14) recevra un accroissement correspondant que l'on pourra développer suivant les puissances ascendantes de ε, de manière à obtenir une série dans laquelle le terme infiniment petit du premier ordre sera le produit de ε par l'intégrale

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_{t_0}^{T} & [(u + v\sqrt{-1})(x' + y'\sqrt{-1}) f'(x + y\sqrt{-1}) \\ & + (u' + v'\sqrt{-1}) f(x - y\sqrt{-1})]\, dt. \end{aligned} \right.$$

Or, comme on trouvera, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{T} (u' + v'\sqrt{-1}) f(x + y\sqrt{-1})\, dt \\ & \qquad = - \int_{t_0}^{T} (u + v\sqrt{-1})(x' + y'\sqrt{-1}) f(x + y\sqrt{-1})\, dt, \end{aligned}$$

il est clair que l'intégrale (16) se réduira d'elle-même à zéro, et l'accroissement de $A + B\sqrt{-1}$ à un infiniment petit du second ordre, ou d'un ordre plus élevé. Il est aisé d'en conclure que, si chacune des fonctions x, y, reçoit successivement des accroissements infiniment petits du premier ordre dont la somme présente un accroissement fini, l'accroissement correspondant de $A + B\sqrt{-1}$ sera infiniment petit du premier ordre, c'est-à-dire nul. On peut remarquer d'ailleurs que l'intégrale (16) n'est autre chose que la variation totale de l'intégrale (14) par rapport aux variables x, y,

considérées comme des fonctions inconnues de t. Si, en adoptant les notations de Lagrange, on posait

$$(17)\qquad u = \delta x, \quad v = \delta y,$$

l'intégrale (16) se présenterait sous la forme

$$(18)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\int_{t_0}^{T} \Big[(x' + y'\sqrt{-1})\,\delta f(x + y\sqrt{-1}) \\ &\qquad + f(x + y\sqrt{-1})\,\delta(x' + y'\sqrt{-1}) \Big]\,dt \\ &\quad = \delta \int_{t_0}^{T} (x' + y'\sqrt{-1})\,f(x + y\sqrt{-1})\,dt. \end{aligned} \right.$$

Ainsi la démonstration du principe ci-dessus énoncé repose sur cette seule observation que la variation de l'intégrale (14) est nulle, ce qu'on pouvait prévoir, d'après les principes du calcul des variations, attendu que la fonction sous le signe $\int$ se réduit, dans cette intégrale, à une différentielle exacte.

4. Supposons maintenant que la fonction $f(x + y\sqrt{-1})$ devienne infinie pour le système des valeurs

$$x = a, \quad y = b,$$

correspondant à la valeur

$$t = \tau$$

de la variable t; $z = a + b\sqrt{-1}$ sera une racine de l'équation

$$(19)\qquad \frac{1}{f(z)} = 0.$$

Désignons d'ailleurs par $\mathfrak{f}$ la limite vers laquelle converge le produit

$$\left[x - a + (y - b)\sqrt{-1} \right] f(x + y\sqrt{-1}),$$

tandis que que x converge vers la limite a, et y vers la limite b; et soit toujours ε un nombre infiniment petit : on aura, sans erreur sensible,

$$(20)\qquad \mathfrak{f} = \varepsilon f(a + b\sqrt{-1} + \varepsilon).$$

Si, de plus, on nomme $A'+B'\sqrt{-1}$ ce que devient $A+B\sqrt{-1}$ quand les variables x, y reçoivent les accroissements infiniment petits εu, εv, on aura encore

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} &A'+B'\sqrt{-1}-(A+B\sqrt{-1})\\ &\quad=\int_{t_0}^{T}\left[x'+\varepsilon u'+(y'+\varepsilon v')\sqrt{-1}\right]f\left[x+\varepsilon u+(y+\varepsilon v)\sqrt{-1}\right]dt\\ &\qquad-\int_{t_0}^{T}(x'+y'\sqrt{-1})f(x+y\sqrt{-1})\,dt.\end{aligned}\right.$$

Or la différence entre les intégrales comprises dans le second membre de l'équation (21) sera toujours sensiblement nulle, excepté lorsque x différera très-peu de a, et y de b, c'est-à-dire lorsque t différera très-peu de τ. On pourra donc, sans altérer cette différence, substituer aux limites des deux intégrales d'autres limites très-rapprochées de τ, et remplacer, en conséquence, les intégrales dont il s'agit par des intégrales définies singulières. Cela posé, faisons

$$(22)\qquad t=\tau+\varepsilon w.$$

Désignons par

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$$

les valeurs de

$$x',\ y',\ u,\ v,$$

correspondant à $t=\tau$. Enfin soient λ, μ deux quantités réelles déterminées par l'équation

$$(23)\qquad \lambda+\mu\sqrt{-1}=\frac{\gamma+\delta\sqrt{-1}}{\alpha+\beta\sqrt{-1}},$$

de laquelle on tire

$$(24)\qquad \mu=\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\alpha^2+\beta^2}.$$

On aura sensiblement, pour des valeurs très-petites de εw,

$$(x'+y'\sqrt{-1})f(x+y\sqrt{-1})=\mathrm{f}\,\frac{x'-y'\sqrt{-1}}{x+a+(y-b)\sqrt{-1}}=\frac{\mathrm{f}}{\varepsilon}\,\frac{1}{w},$$

$$\begin{aligned}&[x'+\varepsilon u'+(y'+\varepsilon v')\sqrt{-1}]f[x+\varepsilon u+(y+\varepsilon v)\sqrt{-1}]\\ &\qquad\qquad=\frac{\mathrm{f}}{\varepsilon}\,\frac{1}{w+\lambda+\mu\sqrt{-1}};\end{aligned}$$

et comme, pour renfermer la variable t entre des limites peu différentes de τ, il suffit de renfermer w entre les limites

$$w = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad w = +\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}},$$

on tirera de l'équation (21)

$$(25)\quad \begin{cases} A' + B'\sqrt{-1} - (A + B\sqrt{-1}) \\ = f\int_{-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}}^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}} \frac{dw}{w + \lambda + \mu\sqrt{-1}} - f\int_{-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}}^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}} \frac{dw}{w}. \end{cases}$$

On doit observer que l'intégrale

$$\int_{-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}}^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}} \frac{dw}{w},$$

dans laquelle la fonction sous le signe $\int$ devient infinie pour $w = 0$, est indéterminée; mais, si l'on réduit cette intégrale à sa valeur principale, c'est-à-dire à zéro, et si l'on pose en outre $\varepsilon = 0$, on trouvera

$$A' + B'\sqrt{-1} - (A + B\sqrt{-1}) = -f\sqrt{-1}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu\, dw}{(w + \lambda)^2 + \mu^2},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(26)\qquad A' + B'\sqrt{-1} - (A + B\sqrt{-1}) = \mp \pi f\sqrt{-1}.$$

Dans cette dernière formule, le signe supérieur ou inférieur devra être préféré, suivant que la quantité μ et la différence

$$\alpha\delta - 6\gamma$$

seront des quantités positives ou négatives, c'est-à-dire, en d'autres termes, suivant que l'expression

$$(27)\qquad x'v - y'u = x'\delta y - y'\delta x$$

obtiendra une valeur positive ou négative, en vertu de la supposition

particulière $t = \tau$. Donc, si les accroissements des fonctions x, y, savoir, εu, εv, viennent à changer de signe, le second membre de l'équation (26) en changera lui-même; et si l'on nomme

$$A'' + B'' \sqrt{-1}$$

l'expression imaginaire qui remplacera dans cette hypothèse

$$A' + B' \sqrt{-1},$$

on aura

$$(28) \qquad A'' + B'' \sqrt{-1} - \left(A + B\sqrt{-1}\right) = \pm \pi \mathfrak{f} \sqrt{-1}.$$

Ajoutons que, dans les formules (26) et (28), $A + B\sqrt{-1}$ désigne non pas la valeur générale de l'intégrale (14), qui, en vertu de l'hypothèse admise, est indéterminée, mais sa valeur principale. (*Voir* le *Résumé des Leçons données à l'École royale Polytechnique.*)

Si l'on combine l'équation (28) avec l'équation (26), on obtiendra la suivante :

$$(29) \qquad A'' + B'' \sqrt{-1} - \left(A' + B'\sqrt{-1}\right) = \pm 2\pi \mathfrak{f} \sqrt{-1},$$

dans laquelle $A' + B'\sqrt{-1}$, $A'' + B''\sqrt{-1}$ représentent deux intégrales complétement déterminées.

5. La formule (26), que nous avons déduite de la considération des intégrales singulières, peut encore être établie par une autre méthode que nous allons indiquer. Supposons

$$(30) \qquad f(z) = \frac{\mathfrak{f}}{z - a - b\sqrt{-1}} + \varpi(z),$$

et concevons de plus que la fonction

$$(31) \qquad \varpi(z) = \frac{\left(z - a - b\sqrt{-1}\right) f(z) - \mathfrak{f}}{z - a - b\sqrt{-1}},$$

représentée par une fraction dont les deux termes s'évanouissent en vertu de l'hypothèse $z = a + b\sqrt{-1}$, ne devienne point alors in-

finie : on tirera des équations (21) et (30)

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} &A' + B'\sqrt{-1} - (A + B\sqrt{-1}) \\ &= f\int_{t_0}^{T}\left[\frac{x' + \varepsilon u' + (y' + \varepsilon v')\sqrt{-1}}{x - a + \varepsilon u + (y - b + \varepsilon v)\sqrt{-1}}\right. \\ &\qquad\qquad\left. - \frac{x' + y'\sqrt{-1}}{x - a + (y - b)\sqrt{-1}}\right]dt \\ &+ \int_{t_0}^{T}\Big\{\left[x' + \varepsilon u' + (y' + \varepsilon v')\sqrt{-1}\right] \\ &\qquad\times \varpi\left[x + \varepsilon u + (y + \varepsilon v)\sqrt{-1}\right] \\ &\qquad - (x' + y'\sqrt{-1})\,\varpi(x + y\sqrt{-1})\Big\}dt. \end{aligned}\right.$$

Or, la fonction $\varpi(z)$ conservant une valeur finie, lors même qu'on suppose $z = a + b\sqrt{-1}$, les deux intégrales

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{t_0}^{T}\left[x' + \varepsilon u' + (y' + \varepsilon v')\sqrt{-1}\right]\varpi\left[x + \varepsilon u + (y + \varepsilon v)\sqrt{-1}\right]dt, \\ &\int_{t_0}^{T}(x' + y'\sqrt{-1})\,\varpi(x + y\sqrt{-1})\,dt \end{aligned}\right.$$

seront équivalentes entre elles, puisqu'elles représenteront la valeur unique de l'intégrale

$$\int_{x_0 + y_0\sqrt{-1}}^{X + Y\sqrt{-1}} \varpi(z)\,dz.$$

D'autre part, il est facile de s'assurer que l'intégrale

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned} &\int\left[\frac{x' + \varepsilon u' + (y' + \varepsilon v')\sqrt{-1}}{x - a + \varepsilon u + (y - b + \varepsilon v)\sqrt{-1}} - \frac{x' + y'\sqrt{-1}}{x - a + (y - b)\sqrt{-1}}\right]dt \\ &= \frac{1}{2}\,l[(x - a + \varepsilon u)^2 + (y - b + \varepsilon v)^2] - \frac{1}{2}\,l[(x - a)^2 + (y - b)^2] \\ &\quad + \left(\operatorname{arc\,tang}\frac{y - b + \varepsilon v}{x - a + \varepsilon u} - \operatorname{arc\,tang}\frac{y - b}{x - a}\right)\sqrt{-1} + \text{const.}, \end{aligned}\right.$$

étant prise entre les limites $t = t_0$, $t = T$, et réduite à sa valeur principale, sera équivalente au produit

$$\mp\pi\sqrt{-1}.$$

En effet, puisque les fonctions u et v s'évanouissent à ces deux limites, la partie réelle de l'intégrale (54), savoir

$$\frac{1}{2}\, l\left[\frac{(x-a+\varepsilon u)^2+(y-b+\varepsilon v)^2}{(x-a)^2+(y-b)^2}\right],$$

se réduira, pour l'une et l'autre limite, à $\frac{1}{2}\, l(1)=0$. Quant au coefficient de $\sqrt{-1}$ dans l'intégrale (34) il peut être présenté sous la forme

$$\operatorname{arctang}\left[\varepsilon\,\frac{(x-a)v-(y-b)u}{(x-a)(x-a+\varepsilon u)+(y-b)(y-b+\varepsilon v)}\right].$$

Or il est aisé de voir que ce coefficient produira un terme de la forme $\mp\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}$ dans l'intégrale (34) prise entre les limites $t=t_0$, $t=\tau$, et un second terme de la forme $\mp\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}$, dans la même intégrale prise entre les limites $t=\tau$, $t=T$. La somme de ces deux termes sera $\mp\pi\sqrt{-1}$, et par suite l'équation (32) se trouvera réduite à la formule (26).

6. Les formules que nous venons d'établir supposent que la constante désignée par f conserve une valeur finie, ce qui n'aurait plus lieu, si l'équation (19) acquérait plusieurs racines égales à l'expression imaginaire $a+b\sqrt{-1}$. Admettons cette dernière hypothèse, et désignons par m le nombre des racines dont il s'agit. Soient, en outre, $A'+B'\sqrt{-1}$, $A''+B''\sqrt{-1}$ les deux expressions dans lesquelles se transforme l'intégrale (14), quand les variables x, y reçoivent : 1° les accroissements infiniment petits εu, εv; 2° les accroissements $-\varepsilon u$, $-\varepsilon v$. Enfin posons, pour abréger,

(35) $$(z-a-b\sqrt{-1})^m f(z)=\mathfrak{f}(z).$$

L'équation (29) devra être remplacée par la suivante :

(36) $$\left\{\begin{aligned} &A''+B''\sqrt{-1}-(A'+B'\sqrt{-1})\\ &\quad=\int_{t_0}^{T}\left[x'-\varepsilon u'+(y'-\varepsilon v')\sqrt{-1}\right]\frac{\mathfrak{f}\left[x-\varepsilon u+(y-\varepsilon v)\sqrt{-1}\right]}{\left[x-a-\varepsilon u+(y-b-\varepsilon v)\sqrt{-1}\right]^m}\,dt\\ &\qquad-\int_{t_0}^{T}\left[x'+\varepsilon u'+(y'+\varepsilon v')\sqrt{-1}\right]\frac{\mathfrak{f}\left[x+\varepsilon u+(y+\varepsilon v)\sqrt{-1}\right]}{\left[x-a+\varepsilon u+(y-b+\varepsilon v)\sqrt{-1}\right]^m}\,dt. \end{aligned}\right.$$

Or la différence entre les intégrales comprises dans le second membre de l'équation (36) sera très-petite, excepté dans le cas où la variable x différera très-peu de a, et la variable y de b; dans ce dernier cas, les expressions

$$(37)\quad x-a-\varepsilon u+(y-b-\varepsilon v)\sqrt{-1},\quad x-a+\varepsilon u+(y-b+\varepsilon v)\sqrt{-1}$$

seront elles-mêmes fort rapprochées de zéro, et, si l'on développe les fonctions

$$\mathrm{f}[x-\varepsilon u+(y-\varepsilon v)\sqrt{-1}],\quad \mathrm{f}[x+\varepsilon u+(y+\varepsilon v)\sqrt{-1}]$$

suivant les puissances ascendantes des expressions dont il s'agit, on pourra, sans craindre qu'il en résulte des erreurs sensibles, supprimer, dans les développements obtenus, les termes qui renfermeront des puissances d'un degré supérieur à m. Cette seule considération suffit pour évaluer le second membre de l'équation (36). Si, pour plus d'exactitude, on pose

$$(38)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{f}(z) &= \mathrm{f}(a+b\sqrt{-1})+\frac{\mathrm{f}(a+b\sqrt{-1})}{1}(z-a-b\sqrt{-1})+\ldots \\ &+\frac{\mathrm{f}^{(m-1)}(a+b\sqrt{-1})}{1.2.3\ldots(m-1)}(z-a-b\sqrt{-1})^{m-1} \\ &+(z-a-b\sqrt{-1})^{m}\varpi(z), \end{aligned}\right.$$

la fonction $\varpi(z)$ conservera en général une valeur finie, et l'équation (36) donnera

$$(39)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{A}''+\mathrm{B}''\sqrt{-1}-(\mathrm{A}'+\mathrm{B}'\sqrt{-1}) \\ &\quad = s_0\mathrm{f}(a+b\sqrt{-1})+\frac{s_1}{1}\mathrm{f}'(a+b\sqrt{-1})+\ldots \\ &\quad +\frac{s_{m-2}}{1.2.3\ldots(m-2)}\mathrm{f}^{(m-2)}(a+b\sqrt{-1}) \\ &\quad +\frac{s_{m-1}}{1.2.3\ldots(m-1)}\mathrm{f}^{(m-1)}(a+b\sqrt{-1}) \\ &\quad +\int_{t_0}^{\mathrm{T}}\Big\{[x'+\varepsilon u'+(y'-\varepsilon v')\sqrt{-1}] \\ &\qquad\qquad \times\varpi[x-\varepsilon u+(y-\varepsilon v)\sqrt{-1}] \\ &\qquad\qquad -[x'+\varepsilon u'+(y'+\varepsilon v')\sqrt{-1}] \\ &\qquad\qquad \times\varpi[x+\varepsilon u+(y+\varepsilon v)\sqrt{-1}]\Big\}dt, \end{aligned}\right.$$

s_n représentant une intégrale déterminée par la formule

$$(40)\quad \left\{ \begin{aligned} s_n = \int_{t_0}^{T} \Bigg\{ & \frac{x' - \varepsilon u' + (y' - \varepsilon v')\sqrt{-1}}{[x - a - \varepsilon u + (y - b - \varepsilon v)\sqrt{-1}]^{m-n}} \\ & - \frac{x' + \varepsilon u' + (y' + \varepsilon v')\sqrt{-1}}{[x - a + \varepsilon u + (y - b + \varepsilon v)\sqrt{-1}]^{m-n}} \Bigg\} dt. \end{aligned} \right.$$

Or le dernier terme de la formule (39) s'évanouit, aussi bien que le dernier terme de la formule (32). De plus l'intégration indiquée dans l'équation (40) peut s'effectuer, et l'intégrale définie qui en résulte est toujours nulle, excepté dans le cas où l'on suppose $m - n = 1$, $n = m - 1$, auquel cas on trouve

$$(41)\qquad s_{m-1} = \pm 2\pi\sqrt{-1}.$$

On arrive encore à la même conclusion, en observant que la fonction sous le signe $\int$, dans l'intégrale s_n, n'a de valeur sensible qu'entre des limites de t fort rapprochées de τ, d'où il suit que cette intégrale peut être considérée comme une intégrale singulière. D'ailleurs, si l'on fait, comme au n° 4, $t = \tau + \varepsilon\omega$, la fonction dont il s'agit sera sensiblement équivalente, pour de très-petites valeurs de $\varepsilon\omega$, au produit

$$(42)\quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{\varepsilon^{m-n}} \Bigg\{ \frac{\alpha + 6\sqrt{-1}}{[(\alpha + 6\sqrt{-1})\omega - (\gamma + \delta\sqrt{-1})]^{m-n}} \\ & \qquad - \frac{\alpha + 6\sqrt{-1}}{[(\alpha + 6\sqrt{-1})\omega + (\gamma + \delta\sqrt{-1})]^{m-n}} \Bigg\} \\ & = \frac{1}{\varepsilon^{m-n}(\alpha + 6\sqrt{-1})^{m-n-1}} \left[\frac{1}{(\omega - \lambda - \mu\sqrt{-1})^{m-n}} - \frac{1}{(\omega + \lambda + \mu\sqrt{-1})^{m-n}} \right] \\ & = \frac{1}{(\alpha + 6\sqrt{-1})^{m-n-1}} \Bigg\{ \frac{1}{[t - \tau - \varepsilon(\lambda + \mu\sqrt{-1})]^{m-n}} \\ & \qquad - \frac{1}{[t - \tau + \varepsilon(\lambda + \mu\sqrt{-1})]^{m-n}} \Bigg\}; \end{aligned} \right.$$

et comme, pour des valeurs sensibles de $\varepsilon\omega = t - \tau$, ce produit se

réduit à très-peu près à

$$(43)\qquad \frac{1}{(\alpha+6\sqrt{-1})^{m-n-1}}\left[\frac{1}{(t-\tau)^{m-n}}-\frac{1}{(t-\tau)^{m-n}}\right],$$

c'est-à-dire à zéro, nous conclurons que, dans l'équation (40), on peut substituer ce produit à la fonction sous le signe $\int$. On aura donc à très-peu près

$$(44)\qquad \left\{\begin{aligned} s_n = \frac{1}{(\alpha+6\sqrt{-1})^{m-n-1}}\int_{t_0}^{T}\Bigg\{&\frac{1}{[t-\tau-\varepsilon(\lambda+\mu\sqrt{-1})]^{m-n}} \\ &-\frac{1}{[t-\tau+\varepsilon(\lambda+\mu\sqrt{-1})]^{m-n}}\Bigg\}dt. \end{aligned}\right.$$

De plus, comme on trouvera généralement, en supposant $m-n>1$,

$$(45)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int\Bigg\{\frac{1}{[t-\tau-\varepsilon(\lambda+\mu\sqrt{-1})]^{m-n}} \\ &\qquad -\frac{1}{[t-\tau+\varepsilon(\lambda+\mu\sqrt{-1})]^{m-n}}\Bigg\}dt \\ &= -\frac{1}{m-n-1}\Bigg\{\frac{1}{[t-\tau-\varepsilon(\lambda+\mu\sqrt{-1})]^{m-n-1}} \\ &\qquad -\frac{1}{[t-\tau+\varepsilon(\lambda+\mu\sqrt{-1})]^{m-n-1}}\Bigg\}+\text{const.}, \end{aligned}\right.$$

et que la fonction de t, comprise dans le second membre de l'équation (45), s'évanouira sensiblement aux deux limites $t=t_0$, $t=\tau$, il est clair que le second membre de l'équation (44) sera nul, pour toutes les valeurs de n inférieures à $m-1$. Si l'on y suppose maintenant $n=m-1$, on aura simplement

$$(46)\qquad \left\{\begin{aligned} s_{m-1} &= \int_{t_0}^{T}\Bigg[\frac{1}{t-\tau-\varepsilon(\lambda+\mu\sqrt{-1})} \\ &\qquad -\frac{1}{t-\tau+\varepsilon(\lambda+\mu\sqrt{-1})}\Bigg]dt \\ &= \int_{t_0}^{T}\Bigg[\frac{t-\tau-\varepsilon\lambda+\varepsilon\mu\sqrt{-1}}{(t-\tau-\varepsilon\lambda)^2+(\varepsilon\mu)^2} \\ &\qquad -\frac{t-\tau+\varepsilon\lambda-\varepsilon\mu\sqrt{-1}}{(t-\tau+\varepsilon\lambda)^2+(\varepsilon\mu)^2}\Bigg]dt. \end{aligned}\right.$$

Or il est facile de s'assurer : 1° que la partie réelle de l'intégrale (46) est sensiblement nulle; 2° que la partie imaginaire, savoir

$$(47)\quad \begin{cases} \sqrt{-1}\displaystyle\int_{t_0}^{T}\left[\frac{\varepsilon\mu}{(t-\tau-\varepsilon\lambda)^2+(\varepsilon\mu)^2}+\frac{\varepsilon\mu}{(t-\tau+\varepsilon\lambda)^2+(\varepsilon\mu)^2}\right]dt \\ \quad =\sqrt{-1}\displaystyle\int_{-\frac{\tau-t_0}{\varepsilon}}^{\frac{T-\tau}{\varepsilon}}\left[\frac{1}{(\omega-\lambda)^2+\mu^2}+\frac{1}{(\omega+\lambda)^2+\mu^2}\right]\mu\,d\omega, \end{cases}$$

se réduit à

$$\pm 2\pi\sqrt{-1}.$$

On aura donc

$$s_{m-1}=\pm 2\pi\sqrt{-1},$$

le signe étant déterminé, comme dans la formule (29); et l'équation (39) donnera

$$(48)\quad A''+B''\sqrt{-1}-(A'+B'\sqrt{-1})=\pm 2\pi\frac{\mathfrak{f}^{(m-1)}(a+b\sqrt{-1})}{1.2.3\ldots(m-1)}\sqrt{-1}.$$

Il en résulte que la formule (29) subsistera encore dans le cas des racines égales, si l'on y suppose la constante $\mathfrak{f}$ déterminée, non plus par l'équation (20),mais par la suivante :

$$(49)\qquad \mathfrak{f}=\frac{\mathfrak{f}^{(m-1)}(a+b\sqrt{-1})}{1.2.3\ldots(m-1)},$$

ou, ce qui revient au même, par l'équation

$$(50)\qquad \mathfrak{f}=\frac{1}{1.2.3\ldots(m-1)}\frac{d^{m-1}[\varepsilon^m\mathfrak{f}(a+b\sqrt{-1}+\varepsilon)]}{d\varepsilon^{m-1}},$$

ε désignant un nombre infiniment petit, qu'on devra réduire à zéro, après avoir effectué les différentiations.

7. Concevons maintenant que, l'équation (19) ayant des racines égales, on veuille calculer, non plus la différence entre les deux intégrales $A'+B'\sqrt{-1}$, $A''+B''\sqrt{-1}$, mais la différence qui existe entre la première de ces intégrales et l'intégrale (14). Il faudra évidemment substituer à l'équation (39) une autre équation de la

forme

$$(51)\quad \left\{\begin{aligned} &A' + B'\sqrt{-1} - (A + B\sqrt{-1}) \\ &\quad = s_0\,f(a + b\sqrt{-1}) + \frac{s_1}{1} f'(a + b\sqrt{-1}) + \ldots \\ &\quad + \frac{s_{m-2}}{1.2.3\ldots(m-2)} f^{(m-2)}(a + b\sqrt{-1}) \\ &\quad + \frac{s_{m-1}}{1.2.3\ldots(m-1)} f^{(m-1)}(a + b\sqrt{-1}) \\ &\quad + \int_{t_0}^{T} \Big\{ [x' + \varepsilon u' + (y' + \varepsilon v')\sqrt{-1}] \\ &\qquad\qquad \times \varpi[x + \varepsilon u + (y + \varepsilon v)\sqrt{-1}] \\ &\qquad\qquad\qquad - (x' + y'\sqrt{-1})\varpi(x + y\sqrt{-1}) \Big\} dt, \end{aligned}\right.$$

et dans laquelle s_n représentera une intégrale déterminée par la formule

$$(52)\quad \left\{\begin{aligned} s_n = \int_{t_0}^{T} \Bigg\{ &\frac{x' + \varepsilon u' + (y' + \varepsilon v')\sqrt{-1}}{[x - a + \varepsilon u + (y - b + \varepsilon v)\sqrt{-1}]^{m-n}} \\ &- \frac{x' + y'\sqrt{-1}}{[x - a + (y - b)\sqrt{-1}]^{m-n}} \Bigg\} dt. \end{aligned}\right.$$

De plus on démontrera, par des raisonnements semblables à ceux dont nous avons fait usage dans le n° 6 : 1° que le dernier terme de la formule (51) s'évanouit; 2° que l'équation (52) peut être remplacée par la suivante :

$$(53)\quad \left\{\begin{aligned} s_n = &\frac{1}{(\alpha + \beta\sqrt{-1})^{m-n-1}} \\ &\times \left\{ \int_{t_0}^{T} \frac{dt}{[t - \tau + \varepsilon(\lambda + \mu\sqrt{-1})]^{m-n}} - \int_{t_0}^{T} \frac{dt}{(t - \tau)^{m-n}} \right\}. \end{aligned}\right.$$

Or, si l'on suppose d'abord $n < m - 1$, on aura

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^{T} \frac{1}{[t - \tau + \varepsilon(\lambda + \mu\sqrt{-1})]^{m-n}} \\ &\quad = \frac{-1}{m - n - 1} \left\{ \frac{1}{[T - \tau + \varepsilon(\lambda + \mu\sqrt{-1})]^{m-n-1}} \right. \\ &\qquad\qquad \left. - \frac{1}{[t_0 - \tau + \varepsilon(\lambda + \mu\sqrt{-1})]^{m-n-1}} \right\}, \end{aligned}$$

d'où il résulte que, pour de très-petites valeurs de ε, la première des intégrales comprises dans le second membre de l'équation (53) se réduira sensiblement à

$$(54)\qquad -\frac{1}{m-n-1}\left[\frac{1}{(\mathrm{T}-\tau)^{m-n-1}}-\frac{1}{(t_0-\tau)^{m-n-1}}\right].$$

Quant à la seconde intégrale

$$(55)\qquad \int_{t_0}^{\mathrm{T}}\frac{dt}{(t-\tau)^{m-n}},$$

elle sera équivalente à la somme

$$(56)\qquad \int_{t_0}^{\tau}\frac{dt}{(t-\tau)^{m-n}}+\int_{\tau}^{\mathrm{T}}\frac{dt}{(t-\tau)^{m-n}},$$

dont les deux parties représenteront des quantités infinies et de même signe, si $m-n$ est un nombre pair, et des quantités infinies, mais de signes contraires, si $m-n$ est un nombre impair. Par conséquent l'intégrale (55) et la valeur de s_n deviendront infinies dans le premier cas, indéterminées dans le second. De plus, comme la valeur principale de l'intégrale (55) sera sensiblement égale à

$$\int_{t_0}^{\tau-\varepsilon}\frac{dt}{(t-\tau)^{m-n}}+\int_{\tau+\varepsilon}^{\mathrm{T}}\frac{dt}{(t-\tau)^{m-n}}$$
$$=\frac{-1}{m-n-1}\left[\frac{1}{(\mathrm{T}-\tau)^{m-n-1}}-\frac{1}{(t_0-\tau)^{m-n-1}}-\frac{1}{\varepsilon^{m-n-1}}+\frac{1}{(-\varepsilon)^{m-n-1}}\right],$$

on voit que, dans le premier cas, cette valeur principale différera très-peu de la fraction

$$(57)\qquad \frac{2}{(m-n-1)\,\varepsilon^{m-n-1}},$$

tandis que, dans le second cas, la même valeur sera égale au produit (54) et la valeur correspondante de s_n à zéro. Enfin, si l'on suppose $n=m-1$, et que l'on réduise toujours l'intégrale (55) à sa valeur principale, on trouvera

$$(58)\qquad s_{m-1}=\mp\pi\sqrt{-1},$$

le signe — ou + devant être préféré suivant que la quantité μ sera positive ou négative. Il résulte de tous ces calculs : 1° que la valeur de la différence $A' + B'\sqrt{-1} - (A + B\sqrt{-1})$ sera infinie, à moins que la nature de la fonction $f(x + y\sqrt{-1})$ ne fasse disparaître, dans le second membre de la formule (51), tous les termes dans lesquels l'indice n de la lettre s sera équivalent à l'un des nombres

$$m - 2, \quad m - 4, \quad m - 6, \ldots,$$

c'est-à-dire à moins que l'on n'ait

$$(59) \qquad \begin{cases} f^{(m-2)}(a + b\sqrt{-1}) = 0, \\ f^{(m-4)}(a + b\sqrt{-1}) = 0, \\ f^{(m-6)}(a + b\sqrt{-1}) = 0, \ldots; \end{cases}$$

2° que, si les conditions (59) sont remplies, on aura

$$(60) \quad A' + B'\sqrt{-1} - (A + B\sqrt{-1}) = \mp \pi \frac{f^{(m-1)}(a + b\sqrt{-1})}{1.2.3\ldots(m-1)}\sqrt{-1},$$

pourvu que l'on représente par $A + B\sqrt{-1}$, non pas la valeur générale de l'intégrale (14), qui, en vertu de l'hypothèse admise, sera indéterminée, mais sa valeur principale. Ajoutons que, pour déduire l'équation (60) de l'équation (26), il suffit de supposer, dans cette dernière, la constante f déterminée, non plus par la formule (20), mais par la formule (49) ou (50).

8. Si la fraction $f(x + y\sqrt{-1})$ devenait infinie pour plusieurs systèmes de valeurs des variables $x = \varphi(t)$ et $y = \chi(t)$, compris entre les limites $x = x_0$, $x = X$, $y = y_0$, $y = Y$, les valeurs correspondantes de $z = x + y\sqrt{-1}$ seraient autant de racines de l'équation (19). Appelons $z_1, z_2, \ldots$ ces racines, et $f_1, f_2, \ldots$ les valeurs correspondantes de la constante f, déterminée par l'équation (20) ou par l'équation (49). En raisonnant comme dans les n°s 4 et 6, on établira évidemment, non la formule (29), mais la suivante :

$$(61) \quad A'' + B''\sqrt{-1} - (A' + B'\sqrt{-1}) = \pm 2\pi f_1\sqrt{-1} \pm 2 f_2\sqrt{-1} \pm \ldots.$$

De plus, la valeur de l'intégrale (14) sera indéterminée, si l'équation (19) n'a que des racines simples, ou des racines égales, mais

pour chacune desquelles des conditions semblables aux conditions (59) soient vérifiées; et si, dans l'une ou l'autre hypothèse, on réduit l'intégrale dont il s'agit à sa valeur principale, on trouvera, en désignant cette valeur par $A + B\sqrt{-1}$,

$$(62)\qquad A' + B'\sqrt{-1} - (A + B\sqrt{-1}) = \mp \pi f_1 \sqrt{-1} \mp \pi f_2 \sqrt{-1} \mp \ldots$$

Enfin si, l'équation (19) ayant des racines égales, les conditions (59) n'étaient point vérifiées pour ces mêmes racines, la valeur générale et la valeur principale de l'intégrale (14) deviendraient infinies, et l'on devrait en dire autant de la différence

$$A' + B'\sqrt{-1} - (A + B\sqrt{-1}).$$

C'est ce qui arrivera en particulier toutes les fois que l'équation (19) aura des racines égales en nombre pair. Concevons, en effet, que, m désignant un nombre pair, l'équation (19) admette m racines égales à l'expression imaginaire $a + b\sqrt{-1}$. Alors, si l'on détermine la fonction $f(z)$ par le moyen de la formule (35), la constante $f(a + b\sqrt{-1})$ aura nécessairement une valeur différente de zéro, et par conséquent la dernière des conditions (59), savoir

$$f(a + b\sqrt{-1}) = 0,$$

ne pourra être vérifiée. Pour confirmer le principe ci-dessus énoncé par un exemple, considérons l'intégrale imaginaire

$$(63)\qquad \int_{-1-\sqrt{-1}}^{1+\sqrt{-1}} \frac{dz}{z^2(1+z^2)},$$

dans laquelle $f(z) = \frac{1}{z^2(1+z^2)}$, et désignons par $A + B\sqrt{-1}$ la valeur qu'on obtient pour cette intégrale, en posant

$$z = t + t\sqrt{-1}.$$

Dans ce cas, l'équation (19) étant réduite à

$$z^2(1+z^2) = 0,$$

deux racines de cette équation deviendront égales à zéro, et corres-

pondront à une valeur nulle de t. On aura d'ailleurs évidemment

$$(64)\quad \left\{\begin{aligned} A + B\sqrt{-1} &= \frac{1}{1+\sqrt{-1}}\int_{-1}^{1}\frac{dt}{t^2(1+2t^2\sqrt{-1})} \\ &= \frac{1}{1+\sqrt{-1}}\left(\int_{-1}^{1}\frac{dt}{t^2} - \int_{-1}^{1}\frac{2\sqrt{-1}\,dt}{1+2t^2\sqrt{-1}}\right). \end{aligned}\right.$$

Or, des deux intégrales comprises dans le dernier membre de la formule (64), la première, savoir

$$\int_{-1}^{1}\frac{dt}{t^2},$$

est équivalente à la somme des deux suivantes :

$$\int_{-1}^{0}\frac{dt}{t^2} = \infty, \quad \int_{0}^{1}\frac{dt}{t^2} = \infty,$$

et par conséquent elle a une valeur infinie positive. Donc l'intégrale (64) aura elle-même une valeur infinie.

9. Si, entre les équations (7), on élimine t, on en obtiendra une autre de la forme

$$(65)\qquad F(x, y) = 0,$$

et, si l'on suppose que x et y représentent des coordonnées rectangulaires, l'équation (65) représentera une courbe tracée dans le plan des x, y, entre les deux points (x_0, y_0), (X, Y) ([1]). Concevons en outre que les fonctions $x = \varphi(t)$, $y = \chi(t)$ vérifient les conditions énoncées dans le n° 2, c'est-à-dire qu'elles croissent ou décroissent l'une et l'autre depuis $t = t_0$ jusqu'à $t = T$. Dans cette hypothèse, la valeur de y, tirée de l'équation (65) et déterminée en fonction de x, croîtra ou décroîtra généralement depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = X$, et la courbe (65) sera comprise dans un rectangle formé par quatre droites parallèles aux axes, savoir celles qui ont pour équations

$$(66)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= x_0, \quad x = X, \\ y &= y_0, \quad y = Y. \end{aligned}\right.$$

([1]) Pour abréger, nous indiquons les points à l'aide de leurs coordonnées renfermées entre parenthèses, et les lignes droites ou courbes à l'aide de leurs équations.

Cela posé, chaque forme particulière de la fonction $F(x, y)$ fournira une courbe particulière et une valeur correspondante de l'intégrale (4). On doit même observer que cette fonction peut changer de nature, tandis que x varie, et qu'en conséquence la courbe $F(x, y) = 0$ peut se transformer en un système de lignes droites ou courbes, qui parte du point (x_0, y_0) pour aboutir au point (X, Y). Alors à chacune des lignes dont il s'agit correspond une intégrale semblable à l'intégrale (14), mais dans laquelle les valeurs extrêmes de x et de y représentent les coordonnées des deux extrémités de cette ligne. Si l'on veut qu'une des lignes en question se réduise à une droite menée du point (ξ_0, η_0) au point (ξ, η), il suffira, pour obtenir l'intégrale correspondante, d'assujettir x et y, considérées comme fonctions de t, à vérifier l'équation

$$(67) \qquad \frac{x - \xi_0}{\xi - \xi_0} = \frac{y - \eta_0}{\eta - \eta_0},$$

puis d'intégrer, par rapport à t, entre des limites telles, que les valeurs extrêmes de x et y se réduisent à ξ_0 et η_0, ξ et η. On pourra prendre, par exemple,

$$(68) \qquad \begin{cases} x = \xi_0 + (\xi - \xi_0)\, t, \\ y = \eta_0 + (\eta - \eta_0)\, t; \end{cases}$$

et alors l'intégrale relative à t deviendra

$$(69) \quad \begin{cases} \int_0^1 \left[\xi - \xi_0 + (\eta - \eta_0)\sqrt{-1}\right] \\ \qquad \times f\left[(\xi_0 + \eta_0\sqrt{-1})(1 - t) + (\xi + \eta\sqrt{-1})\, t\right] dt. \end{cases}$$

Si, dans cette intégrale, on substitue successivement les variables x et y à la variable t, elle prendra les formes suivantes :

$$(70) \quad \int_{\xi_0}^{\xi} \left(1 + \frac{\eta - \eta_0}{\xi - \xi_0}\sqrt{-1}\right) f\left[\left(1 + \frac{\eta - \eta_0}{\xi - \xi_0}\sqrt{-1}\right) x + \frac{\eta_0\xi - \eta\xi_0}{\xi - \xi_0}\sqrt{-1}\right] dx,$$

$$(71) \quad \int_{\eta_0}^{\eta} \left(\frac{\xi - \xi_0}{\eta - \eta_0} + \sqrt{-1}\right) f\left[\left(\frac{\xi - \xi_0}{\eta - \eta_0} + \sqrt{-1}\right) y + \frac{\eta\xi_0 - \eta_0\xi}{\xi - \xi_0}\right] dy.$$

Enfin, si la droite que l'on considère est parallèle à l'axe des x, on

aura $\eta = \eta_0$, ce qui réduira l'intégrale (70) à

$$(72) \qquad \int_{\xi_0}^{\xi} f(x + \eta\sqrt{-1})\, dx.$$

Si, au contraire, cette droite est parallèle à l'axe de y, on aura $\xi = \xi_0$, et l'intégrale (71) se trouvera réduite à

$$(73) \qquad \sqrt{-1}\int_{\eta_0}^{\eta} f(\xi + y\sqrt{-1})\, dy.$$

En général, concevons qu'une des lignes tracées entre le point (x_0, y_0) et le point (X, Y) s'étende du point (ξ_0, η_0) au point (ξ, η). Si cette ligne a pour équation

$$(74) \qquad y = \psi(x),$$

l'intégrale correspondante pourra être présentée sous la forme

$$(75) \qquad \int_{\xi_0}^{\xi} [1 + \psi'(x)\sqrt{-1}]\, f[x + \psi(x)\sqrt{-1}]\, dx.$$

Si, au contraire, cette ligne a pour équation

$$(76) \qquad x = \psi(y),$$

l'intégrale (75) devra être remplacée par la suivante :

$$(77) \qquad \int_{\eta_0}^{\eta} [\psi'(y) + \sqrt{-1}]\, f[\psi(y) + y\sqrt{-1}]\, dy.$$

10. Le système des lignes tracées entre les points (x_0, y_0), (X, Y) peut être réduit à la droite qui joint ces deux points, ou, ce qui revient au même, à la diagonale du rectangle formé par les droites (66). La valeur de l'expression (14), correspondant à cette diagonale, sera ce que nous appellerons la *valeur moyenne* de l'intégrale (4). Cette valeur moyenne sera évidemment semblable à l'expression (69), et représentée par l'intégrale

$$(78) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^1 [X - x_0 + (Y - y_0)\sqrt{-1}]\, f[(x_0 + y_0\sqrt{-1})(1 - t) \\ &\qquad\qquad + (X + Y\sqrt{-1})\, t]\, dt. \end{aligned} \right.$$

Si à la diagonale du rectangle ci-dessus mentionné on substitue : 1° le système des droites

$$(79) \qquad y = y_0, \quad x = X,$$

qui coïncident avec deux côtés de ce rectangle; 2° le système des droites

$$(80) \qquad x = x_0, \quad y = Y,$$

qui coïncident avec les deux autres côtés, on obtiendra, dans l'un et l'autre cas, à la place de l'intégrale (78), une somme de deux intégrales semblables aux intégrales (72) et (73). Les deux sommes ainsi formées, savoir

$$(81) \qquad \int_{x_0}^{X} f(x + y_0\sqrt{-1})\,dx + \sqrt{-1}\int_{y_0}^{Y} f(X + y\sqrt{-1})\,dy$$

et

$$(82) \qquad \int_{x_0}^{X} f(x + Y\sqrt{-1})\,dy + \sqrt{-1}\int_{y_0}^{Y} f(x_0 + y\sqrt{-1})\,dy,$$

sont ce que nous nommerons les *valeurs extrêmes* de l'intégrale (4).

11. Concevons maintenant que l'on veuille comparer entre elles deux valeurs de l'intégrale (4) correspondant à deux lignes droites ou courbes très-rapprochées l'une de l'autre, ou, ce qui revient au même, à deux fonctions peu différentes successivement substituées à la fonction $F(x, y)$. En vertu du principe établi dans le n° 3, ces deux valeurs seront égales si la fonction $f(x + y\sqrt{-1})$ ne devient jamais infinie pour des valeurs des coordonnées x, y, relatives à des points situés sur les courbes que l'on considère, ou entre ces mêmes courbes. Si le contraire a lieu, s'il arrive, par exemple, que des points renfermés entre les deux courbes aient pour coordonnées les quantités réelles comprises dans quelques racines de l'équation (19), la différence entre les deux valeurs de l'intégrale (4) sera déterminée par la formule (61). Enfin, si quelques racines de l'équation (19) sont relatives à des points situés sur les deux courbes, la différence entre les deux valeurs de l'intégrale (4) sera ou infinie ou indéterminée. Ajoutons que, dans le dernier cas, la

formule (61) continuera de subsister si, aux intégrales représentées par $A' + B'\sqrt{-1}$, $A'' + B''\sqrt{-1}$, on substitue leurs valeurs principales, et si l'on réduit à moitié celles des constantes $f_1, f_2, \ldots$, qui correspondront aux points dont il s'agit. Il est encore essentiel de rappeler que, dans la formule (61), le signe placé devant chaque produit de la forme

$$(83) \qquad 2\pi f\sqrt{-1} \quad \text{ou} \quad \pi f\sqrt{-1}$$

sera — ou +, suivant que la différence (27) aura une valeur positive ou négative. Si, pour fixer les idées, on suppose $t_0 < T$, la différence (27) pourra être remplacée par la suivante :

$$(84) \qquad dx\,\delta y - dy\,\delta x.$$

Or il est facile de s'assurer que cette différence conservera le même signe pour tous les points compris entre les deux courbes, lorsqu'elles ne se traverseront pas mutuellement. Par conséquent, dans cette hypothèse, tous les produits de la forme (83) devront être affectés du même signe. Si l'on suppose, par exemple, $x_0 < X$, $y_0 < Y$, et l'ordonnée de la seconde courbe inférieure à l'ordonnée de la première, alors, en nommant $A' + B'\sqrt{-1}$, $A'' + B''\sqrt{-1}$, les valeurs de l'intégrale (4) relatives à la première courbe et à la seconde, on aura

$$A'' + B''\sqrt{-1} + A' - B'\sqrt{-1} = 2\pi(f_1 + f_2 + \ldots)\sqrt{-1},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(85) \quad A'' + B''\sqrt{-1} = A' + B'\sqrt{-1} = 2\pi(f_1 + f_2 + \ldots)\sqrt{-1}.$$

On devra d'ailleurs, dans la formule (85), réduire les intégrales désignées par $A' + B'\sqrt{-1}$, $A'' + B''\sqrt{-1}$ à leurs valeurs principales, et remplacer les constantes $f_1, f_2, \ldots$ par $\frac{1}{2}f_1, \frac{1}{2}f_2, \ldots$, toutes les fois que ces constantes correspondront à des points situés sur l'une des courbes, et que les intégrales $A' + B'\sqrt{-1}$, $A'' + B''\sqrt{-1}$ ne deviendront pas infinies.

Si l'on voulait passer d'une courbe donnée à une autre qui n'en fût pas très-voisine, il suffirait d'imaginer une troisième courbe

mobile et variable de forme, que l'on ferait coïncider successivement et à deux époques différentes avec les deux courbes fixes. A l'aide de cette considération, on déterminerait la différence entre les valeurs de l'intégrale (4) relatives aux deux courbes fixes, et l'on prouverait que *cette différence (quand elle conserve une valeur finie) est la somme des termes de la forme* $\pm 2\pi \mathrm{f} \sqrt{-1}$, *qui correspondent à des points renfermés entre les deux courbes, et des termes de la forme* $\pm \pi \mathrm{f} \sqrt{-1}$, *qui correspondent à des points situés sur l'une d'elles.* La proposition précédente s'étend au cas où chacune des courbes serait remplacée par un système de lignes droites ou courbes, formant un contour qui partirait du point (x_0, y_0) pour aboutir au point (X, Y), et subsiste lors même que de pareils contours ne seraient pas renfermés dans le rectangle figuré par les droites (66). Dans ce dernier cas, chaque système de lignes droites ou courbes fournirait toujours une somme d'intégrales semblables à l'intégrale (14). Mais cette somme, d'après les conventions admises, cesserait de représenter une valeur particulière de l'intégrale (4).

12. Si, à l'aide des principes que nous venons d'exposer, on détermine la différence entre les deux sommes (81) et (82), c'est-à-dire entre les valeurs extrêmes de l'intégrale (4), dans le cas où cette différence conserve une valeur finie, on trouvera

$$(86)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{x_0}^{X} f(x+y_0\sqrt{-1})\,dx + \sqrt{-1}\int_{y_0}^{Y} f(X+y\sqrt{-1})\,dy \\ &\quad = \int_{x_0}^{X} f(x+Y\sqrt{-1}) + \sqrt{-1}\int_{y_0}^{Y} f(x_0+y\sqrt{-1})\,dy \\ &\qquad + 2\pi(\mathrm{f}_1+\mathrm{f}_2+\ldots)\sqrt{-1}, \end{aligned}\right.$$

les termes $\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \ldots$ étant relatifs à celles des racines de l'équation (19) dans lesquelles les parties réelles restent comprises entre les limites x_0, X, et les coefficients de $\sqrt{-1}$ entre les limites y_0, Y. Ajoutons que l'un de ces termes, pris au hasard, devra être réduit à moitié, si, dans la racine correspondante, la partie réelle se confond avec l'une des quantités x_0, X, ou le coefficient de $\sqrt{-1}$ avec l'une des quantités y_0, Y. Dans la même hypothèse, celles des inté-

grales comprises dans la formule (86), qui deviendront indéterminées, devront être réduites à leurs valeurs principales.

Si l'on fait, pour abréger,

$$(87)\qquad \Delta = 2\pi(\mathfrak{f}_1 + \mathfrak{f}_2 + \ldots)\sqrt{-1},$$

l'équation (86) deviendra

$$(88)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{x_0}^{X} f(x + y_0\sqrt{-1})\,dx + \sqrt{-1}\int_{y_0}^{Y} f(X + y\sqrt{-1})\,dy \\ &\quad = \int_{x_0}^{X} f(x + Y\sqrt{-1})\,dx + \sqrt{-1}\int_{y_0}^{Y} f(x_0 + y\sqrt{-1})\,dy + \Delta. \end{aligned}\right.$$

L'équation (88) coïncide avec l'une des formules générales que j'ai données dans le *Journal de l'École royale Polytechnique* et dans le *Bulletin de la Société Philomathique* de novembre 1822. Elle subsiste non-seulement pour des valeurs réelles, mais encore pour des valeurs imaginaires de la fonction $f(x)$, et peut toujours être remplacée par deux équations réelles, que l'on obtient en égalant dans les deux membres : 1° les parties réelles ; 2° les coefficients de $\sqrt{-1}$. Ajoutons que, pour éviter toute incertitude sur la valeur des notations employées dans le calcul, il faut, dans l'équation (88), choisir la fonction $f(x)$ de telle manière que l'expression $f(x + y\sqrt{-1})$ conserve une valeur unique et reste complétement déterminée pour toutes les valeurs de x et de y comprises entre les limites des intégrations. Cette condition peut être remplie dans le cas même où $f(x + y\sqrt{-1})$ renfermerait des logarithmes ou des puissances irrationnelles de quantités variables, c'est-à-dire des expressions de la forme

$$(89)\qquad (u + v\sqrt{-1})^{\mu},\quad l(u + v\sqrt{-1}),$$

μ désignant une quantité réelle, et u, v deux fonctions réelles et déterminées des variables x, y. Effectivement les expressions (89) satisferont à la condition requise, si la quantité u reste positive pour toutes les valeurs de x et y comprises entre les limites des intégrations, et si l'on adopte les conventions que nous avons admises dans le *Cours d'Analyse algébrique* et dans les précédents Mémoires. En vertu de ces conventions, la notation arc tang $\frac{v}{u}$ est

toujours employée pour désigner le plus petit arc (abstraction faite du signe) dont la tangente soit égale à $\frac{v}{u}$, et les notations (89) pour représenter les expressions imaginaires

$$(u^2+v^2)^{\frac{\mu}{2}}\left[\cos\left(\mu \operatorname{arc\,tang}\frac{v}{u}\right)+\sqrt{-1}\sin\left(\mu \operatorname{arc\,tang}\frac{v}{u}\right)\right],$$

$$\frac{1}{2}l(u^2+v^2)+\sqrt{-1}\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{u}.$$

On peut encore considérer la notation

$$(u+v\sqrt{-1})^{\lambda+\mu\sqrt{-1}},$$

dans laquelle λ et μ désignent des quantités quelconques, comme représentant une fonction unique et complétement déterminée, toutes les fois que la quantité variable u reçoit une valeur positive. En effet, comme, dans cette hypothèse, on aura généralement

$$u+v\sqrt{-1}=e^{l(u+v\sqrt{-1})},$$

on sera naturellement conduit à la formule

$$(u+v\sqrt{-1})^{\lambda+\mu\sqrt{-1}}=e^{(\lambda+\mu\sqrt{-1})\,l(u+v\sqrt{-1})},$$

qui suffira pour fixer complétement le sens de l'expression comprise dans son premier membre. Si l'on suppose en particulier $u=0$, on trouvera, pour des valeurs positives de v,

$$(v\sqrt{-1})^{\lambda+\mu\sqrt{-1}}=e^{\lambda l(v)-\frac{\pi}{2}\mu}\left\{\cos\left[\frac{\pi}{2}\lambda-\mu l(v)\right]\right.$$
$$\left.+\sqrt{-1}\sin\left[\frac{\pi}{2}\lambda+\mu l(v)\right]\right\},$$

et, pour des valeurs négatives de v,

$$(v\sqrt{-1})^{\lambda+\mu\sqrt{-1}}=e^{\lambda l(-v)+\frac{\pi}{2}\mu}\left\{\cos\left[\frac{\pi}{2}\lambda-\mu l(-v)\right]\right.$$
$$\left.-\sqrt{-1}\sin\left[\frac{\pi}{2}\lambda-\mu l(-v)\right]\right\}.$$

Lorsque la fonction $f(x+y\sqrt{-1})$ s'évanouit pour $x=\infty$.

quel que soit y, alors, en prenant

$$x_0 = 0, \quad X = \infty, \quad y_0 = 0, \quad Y = b,$$

on tire de l'équation (88)

$$(90) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_0^\infty f(x + b\sqrt{-1})\,dx = \int_0^\infty f(x)\,dx \\ -\sqrt{-1}\int_0^b f(y\sqrt{-1})\,dy - \Delta. \end{aligned} \right.$$

Si l'on pose dans celle-ci

$$f(x) = e^{-x^m},$$

m désignant un nombre quelconque, on en déduira deux équations réelles, qui comprendront, comme cas particulier, une formule de M. Laplace, savoir :

$$(91) \quad \int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2bx\,dx = e^{-b^2}\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}}e^{-b^2}.$$

Lorsque la fonction $f(x + y\sqrt{-1})$ s'évanouit pour $y = \infty$, quel que soit x, alors, en prenant

$$x_0 = 0, \quad X = a, \quad y_0 = 0, \quad Y = \infty,$$

on tire de la formule (88)

$$(92) \quad \int_0^a f(x)\,dx = \Delta - \sqrt{-1}\int_0^\infty [f(a + y\sqrt{-1}) - f(y\sqrt{-1})]\,dy.$$

Si l'on pose dans celle-ci

$$f(x) = \varphi(x)\,e^{bx\sqrt{-1}},$$

b désignant une quantité positive, et si l'on remplace ensuite, dans le second membre, y par $\frac{x}{b}$, elle fournira le moyen de convertir les intégrales

$$\int_0^a \varphi(x)\cos bx\,dx, \quad \int_0^a \varphi(x)\sin bx\,dx$$

en d'autres intégrales de la forme

$$\int_0^\infty \psi\left(\frac{x}{b}\right) e^{-x}\,dx.$$

Pour obtenir des valeurs très-approchées de ces dernières, lorsque le nombre b sera considérable, il suffira de développer les fonctions $\psi\left(\frac{x}{b}\right), \cdots$ en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes, entières ou fractionnaires, du rapport $\frac{x}{b}$. On n'aura plus alors à calculer que des intégrales semblables à celles que M. Legendre désigne par la lettre Γ, c'est-à-dire de la forme

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x}\,dx,$$

et qui sont déterminées, pour des valeurs entières de n, par l'équation

$$\Gamma(n) = 1.2.3\ldots(n-1).$$

La remarque que l'on vient de faire est très-utile dans la théorie des ondes, ainsi que je l'ai montré dans les nouvelles Notes ajoutées au Mémoire qui a remporté le prix.

Lorsque la fonction $f(x+y\sqrt{-1})$ s'évanouit pour $x=\pm\infty$, quel que soit y, alors en prenant

$$x_0 = -\infty, \quad X = \infty, \quad y_0 = 0, \quad Y = b,$$

on tire de l'équation (88)

$$(93) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x+b\sqrt{-1})\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx - \Delta.$$

Si l'on suppose, par exemple,

$$f(x) = (b - x\sqrt{-1})^{a-1} e^{-x^2},$$

a désignant un nombre rationnel ou irrationnel, Δ deviendra nul, et l'on obtiendra une formule que j'ai donnée dans le *Bulletin de la Société Philomathique,* et qui renferme, comme cas particulier, l'équation (91).

Lorsque la fonction $f(x+y\sqrt{-1})$ s'évanouit pour $x=\infty$, quel que soit y, et pour $y=\infty$, quel que soit x, alors, en posant

$$x_0=0,\quad X=\infty,\quad y_0=0,\quad Y=\infty,$$

on tire de la formule (88)

$$(94)\qquad \int_0^\infty f(x)\,dx=\sqrt{-1}\int_0^\infty f(y\sqrt{-1})\,dy+\Delta.$$

Parmi les résultats que fournit cette dernière équation, nous indiquerons ceux que l'on obtient en prenant pour $f(x)$ une fonction de la forme

$$f(x)=\varphi(x)\,e^{bx\sqrt{-1}},$$

ou bien en supposant

$$f(x)=\left(e^{-x}-\frac{1}{1+x}\right)\frac{1}{x}.$$

L'équation à laquelle on parvient, dans la dernière hypothèse, savoir :

$$(95)\qquad \int_0^\infty \left(e^{-x}-\frac{1}{1+x}\right)\frac{dx}{x}=\int_0^\infty\left(\cos y-\frac{1}{1+y^2}\right)\frac{dy}{y},$$

offre, sous une forme nouvelle, une intégrale qui, suivant la remarque d'Euler, peut servir à en calculer un grand nombre d'autres.

Lorsque la fonction $f(x+y\sqrt{-1})$ s'évanouit pour $x=-\infty$, quel que soit y, et pour $y=\infty$, quel que soit x, alors, en posant

$$x_0=-\infty,\quad X=0,\quad y=0,\quad Y=\infty.$$

on tire de l'équation (88)

$$(96)\qquad \int_{-\infty}^0 f(x)\,dx=-\sqrt{-1}\int_0^\infty f(y\sqrt{-1})\,dy+\Delta.$$

On peut, de cette dernière formule combinée avec l'équation (94), déduire des résultats dignes de remarque. Supposons, par exemple,

$$f(x)=\frac{\varphi(x)}{(r+x\sqrt{-1})^a},$$

r et a désignant deux quantités positives, dont la seconde soit infé-

rieure à l'unité. Comme la fonction $\varphi(x)$ pourra être présentée sous la forme

$$f(x) = \frac{1}{(\sqrt{-1})^a} \frac{\varphi(x)}{(x - r\sqrt{-1})^a},$$

on tirera de l'équation (94)

$$(97)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty \frac{\varphi(x)}{(r + x\sqrt{-1})^a}\,dx \\ \displaystyle\quad = \frac{\sqrt{-1}}{(\sqrt{-1})^a} \int_0^\infty \frac{\varphi(y\sqrt{-1})}{[(y-r)\sqrt{-1}]^a}\,dy + \Delta', \end{cases}$$

Δ' étant une valeur particulière de la constante Δ. Au contraire, en présentant la fonction $f(x)$ sous la forme

$$f(x) = \frac{1}{(-\sqrt{-1})^a} \frac{\varphi(x)}{(-x + r\sqrt{-1})^a},$$

on tirera de la formule (96)

$$(98)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{\varphi(x)}{(r + x\sqrt{-1})^a}\,dx \\ \displaystyle\quad = \frac{-\sqrt{-1}}{(-\sqrt{-1})^a} \int_0^\infty \frac{\varphi(y\sqrt{-1})}{[(r-y)\sqrt{-1}]^a}\,dy + \Delta'', \end{cases}$$

Δ'' étant une constante différente de Δ'. Si maintenant on ajoute les équations (97) et (98), en observant que les deux produits

$$(\sqrt{-1})^a[(y-r)\sqrt{-1}]^a, \quad (-\sqrt{-1})^a[(r-y)\sqrt{-1}]^a,$$

se réduisent, pour $y > r$, aux expressions

$$(\sqrt{-1})^{2a}(y-r)^a, \quad (-\sqrt{-1})^{2a}(r-y)^a,$$

et, pour $y < r$, à la seule quantité

$$(r-y)^a,$$

puis, remplaçant y par $x - r$, on trouvera

$$(99)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\varphi(x)}{(r + x\sqrt{-1})^a}\,dx \\ \displaystyle\quad = [(\sqrt{-1})^{1-2a} + (-\sqrt{-1})^{1-2a}] \int_r^\infty \frac{\varphi(y\sqrt{-1})\,dy}{(y-r)^a} + \Delta' + \Delta'' \\ \displaystyle\quad = 2\sin a\pi . \int_0^\infty x^{-a}\varphi[(r+x)\sqrt{-1}]\,dx + \Delta' + \Delta''. \end{cases}$$

En raisonnant de la même manière, et supposant

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{(r + x\sqrt{-1})^a \, l(r + x\sqrt{-1})},$$

on établirait la formule

$$(100) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)\,dx}{(r + x\sqrt{-1})^a \, l(r + x\sqrt{-1})} \\ &= 2\int_0^{\infty} \frac{\pi\cos a\pi + \sin a\pi . l(x)}{\pi^2 + [l(x)]^a} x^{-a}\varphi[(r+x)\sqrt{-1}]\,dx + \Delta' + \Delta''. \end{aligned} \right.$$

On pourrait construire encore un grand nombre de formules du même genre, parmi lesquelles nous indiquerons celle à laquelle on parvient quand on suppose

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{(r + x\sqrt{-1})^a \, [l(r + x\sqrt{-1})]^b},$$

a, b désignant deux quantités réelles dont la première est inférieure à l'unité.

Si, dans l'équation (99), on pose successivement

$$\varphi(x) = e^{bx\sqrt{-1}}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{(s - x\sqrt{-1})^b},$$

b, s désignant des quantités positives, les constantes Δ, Δ' s'évanouiront, et l'on obtiendra les formules

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{bx\sqrt{-1}}}{(r + x\sqrt{-1})^a}\,dx &= 2\sin a\pi . e^{-br}\int_0^{\infty} x^{-a} e^{-bx}dx \\ &= 2b^{a-1}e^{-br}\Gamma(1-a).\sin a\pi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(r + x\sqrt{-1})^a (s - x\sqrt{-1})^b} &= 2\sin a\pi \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^a(r+s+x)^b} \\ &= 2(r+s)^{1-a-b}\sin a\pi \int_0^{\infty} \frac{x^{-a}dx}{(1+x)^b}. \end{aligned}$$

Ces dernières, en vertu des propriétés connues de la fonction Γ,

peuvent s'écrire comme il suit :

$$(101) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{bx\sqrt{-1}}\,dx}{(r+x\sqrt{-1})^a} = \frac{2\pi}{\Gamma(a)} b^{a-1} e^{-br},$$

et

$$(102) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(r+x\sqrt{-1})^b (s-x\sqrt{-1})^b} = 2\pi (r+s)^{1-a-b} \frac{\Gamma(a+b-1)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}.$$

En les différentiant plusieurs fois de suite par rapport à la quantité r, on reconnaît qu'elles s'étendent au cas même où l'exposant a devient supérieur à l'unité.

Il est essentiel de remarquer que les équations (99), (100), (101), (102), etc., subsisteront encore pour des valeurs imaginaires des constantes a et b, toutes les fois que les intégrales comprises dans ces formules conserveront des valeurs finies.

Lorsque la fonction $f(x+y\sqrt{-1})$ s'évanouit pour $x = \pm\infty$, quel que soit y, et pour $y = \infty$, quel que soit x, alors, en prenant

$$x_0 = -\infty, \quad X = \infty, \quad y_0 = 0, \quad Y = \infty,$$

on tire généralement de l'équation (88)

$$(103) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \Delta,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(104) \qquad \int_{0}^{\infty} \frac{f(x)+f(-x)}{2}\,dx = \frac{1}{2}\Delta.$$

Dans les seconds membres des formules qui précèdent, la somme représentée par Δ se compose uniquement de termes relatifs, les uns aux racines réelles de l'équation (19), les autres aux racines imaginaires dans lesquelles le coefficient de $\sqrt{-1}$ est positif. De plus, comme, pour obtenir ces formules, il a fallu prendre les intégrales relatives à y, à partir de $y = 0$, il en résulte que, après avoir déterminé, à l'aide de la formule (87), les termes correspondant aux diverses racines, on devra réduire à moitié ceux qui se rapporteront à des racines réelles, c'est-à-dire à des racines dans lesquelles le coefficient de $\sqrt{-1}$ sera nul.

Les formules (103) et (104) réduisent, comme on le voit, la détermination des intégrales qu'elles renferment à la recherche des racines de l'équation (19), dans lesquelles le coefficient de $\sqrt{-1}$ est positif. Elles fournissent les valeurs de presque toutes les intégrales définies connues et d'un grand nombre d'autres, parmi lesquelles on peut remarquer celles que j'ai citées dans le XIXe cahier du *Journal de l'École royale Polytechnique*, dans le *Résumé* des leçons données à cette École, et dans le *Bulletin des Sciences* d'avril 1825.

Il est important d'observer que, dans le cas où l'équation (19) a des racines réelles, les intégrales (103) et (104) sont du nombre de celles dont les valeurs générales restent indéterminées. Mais, en vertu des principes établis dans les paragraphes précédents, les intégrales dont il s'agit doivent être alors réduites à leurs valeurs principales. Il est d'ailleurs facile de transformer ces valeurs principales en intégrales définies, dans lesquelles les fonctions, sous le signe $\int$, cessent de devenir infiniment grandes pour des valeurs particulières de la variable x.

On peut remarquer encore que, dans plusieurs cas, l'équation (19) aura une infinité de racines; alors la somme désignée par Δ se composera, du moins en général, d'un nombre infini de termes, et, par conséquent, chacune des intégrales (103), (104) se trouvera représentée par la somme d'une série infinie. Mais il arrivera souvent ou que la plupart des termes de la série devront être rejetés, parce qu'ils appartiendront à des racines dans lesquelles le coefficient de $\sqrt{-1}$ sera négatif, ou que la plupart des termes seront deux à deux égaux et de signes contraires, ou que la somme de la série pourra être facilement déterminée par la méthode que nous indiquerons dans le n° 13. Lorsque l'une de ces conditions sera remplie, les équations (103) et (104) continueront à fournir, en termes finis, les valeurs des intégrales qu'elles renferment.

Enfin il peut arriver que l'équation (19) n'ait pas de racines dans lesquelles le coefficient de $\sqrt{-1}$ soit positif ou nul, et, dans ce cas, les intégrales (103), (104) se réduiront à zéro. On trouvera, par exemple, en désignant par a, b, r, s des quantités

positives,

$$(105)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{bx\sqrt{-1}}\,dx}{(r - x\sqrt{-1})} = 0,$$

$$(106)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(r - x\sqrt{-1})^a (s - x\sqrt{-1})^b} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(r + x\sqrt{-1})^a (s + x\sqrt{-1})^b} = 0. \end{aligned} \right.$$

Si l'on combine l'équation (105) avec l'équation (101), on en tirera

$$(107)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^{\infty} \frac{(r - x\sqrt{-1})^{-a} + (r + x\sqrt{-1})^{-a}}{2} \cos bx\,dx = \frac{\pi}{2\Gamma(a)} b^{a-1} e^{-br}, \\ &\int_0^{\infty} \frac{(r - x\sqrt{-1})^{-a} - (r + x\sqrt{-1})^{-a}}{2\sqrt{-1}} \sin bx\,dx = \frac{\pi}{2\Gamma(a)} b^{a-1} e^{-br}. \end{aligned} \right.$$

J'ai donné ces dernières formules, au commencement de 1815, dans un Mémoire où elles étaient appliquées à la conversion des différences finies des puissances positives en intégrales définies, et pour lequel MM. Laplace, Legendre et Lacroix furent nommés commissaires. On peut au reste opérer cette conversion en s'appuyant ou sur la formule (101), ou sur une autre qui s'accorde avec elle, et qui a été donnée par M. Laplace.

On tire encore des formules (102) et (106), combinées entre elles,

$$(108)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^{\infty} \frac{(r - x\sqrt{-1})^{-a} + (r + x\sqrt{-1})^{-a}}{2} \, \frac{(s - x\sqrt{-1})^{-b} + (s + x\sqrt{-1})^{-b}}{2}\,dx \\ &= \int_0^{\infty} \frac{(r - x\sqrt{-1})^{-a} - (r + x\sqrt{-1})^{-a}}{2\sqrt{-1}} \, \frac{(s - x\sqrt{-1})^{-b} - (s - x\sqrt{-1})^{-b}}{2\sqrt{-1}}\,dx \\ &= \frac{\pi}{2} (r + s)^{1-a-b} \frac{\Gamma(a + b - 1)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}. \end{aligned} \right.$$

Si, dans les formules (103), (104), et dans celles qui s'en déduisent, on pose

$$(109)\qquad x = \operatorname{tang} p,$$

on obtiendra de nouvelles intégrales définies relatives à la variable p,

et prises entre les limites $p = -\frac{\pi}{2}$, $p = \frac{\pi}{2}$, ou $p = 0$ et $p = \frac{\pi}{2}$. En opérant ainsi, désignant par $\varphi(x)$ une fonction réelle et rationnelle de la variable x, et prenant

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[\varphi\left(\frac{1+x\sqrt{-1}}{1-x\sqrt{-1}}\right) - \varphi\left(\frac{1-x\sqrt{-1}}{1+x\sqrt{-1}}\right)\right]\frac{l(1-x\sqrt{-1})}{1+x^2}$$
$$= \cos^2 p.\,\frac{\varphi(e^{2p\sqrt{-1}}) - \varphi(e^{-2p\sqrt{-1}})}{2\sqrt{-1}}\,(p - \sqrt{-1}\,l\cos p),$$

on réduira l'intégrale (104) à la suivante :

$$(110)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varphi(e^{2p\sqrt{-1}}) - \varphi(e^{-2p\sqrt{-1}})}{2\sqrt{-1}}\,p\,dp.$$

Cette dernière coïncide avec l'une de celles que j'avais présentées dans le Mémoire de 1814 (deuxième Supplément). De même, si l'on fait, pour abréger,

$$(111)\quad u = \frac{\varphi(e^{2p\sqrt{-1}}) + \varphi(e^{-2p\sqrt{-1}})}{2},\quad v = \frac{\varphi(e^{2p\sqrt{-1}}) - \varphi(e^{-2p\sqrt{-1}})}{2\sqrt{-1}},$$

on déterminera sans peine les valeurs des intégrales

$$(112)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} u.l\cos p\,dp,\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} u.l\sin p\,dp,\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} u.l\,\mathrm{tang}\,p\,dp,$$

$$(113)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(\mathrm{tang}\,p)^a\,dp,\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u\cos ap}{(\cos p)^a}\,dp,\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u.l\cos p}{p^2+(l\cos p)^2}\,dp,$$

$$(114)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} v(\mathrm{tang}\,p)^a\,dp,\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{v\sin ap}{(\cos p)^a}\,dp,\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{vp}{p^2+(l\cos p)^2}\,dp,$$

etc.

On trouvera, en particulier, pour des valeurs de r comprises entre

les limites $-1, +1$,

$$(115)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r\sin 2p}{1-2r\cos 2p+r^2}\, p\, dp = \frac{\pi}{4}\, l(1+r),$$

$$(116)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-r\cos 2p}{1-2r\cos 2p+r^2}\, (\operatorname{tang} p)^a\, dp = \frac{\pi}{4\cos\frac{a\pi}{2}}\left[1+\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^a\right],$$

$$(117)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r\sin 2p}{1-2r\cos 2p+r^2}\, (\operatorname{tang} p)^a\, dp = \frac{\pi}{4\sin\frac{a\pi}{2}}\left[1-\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^a\right],$$

$$(118)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-r\cos 2p}{1-2r\cos 2p+r^2}\, l\cos p\, dp = \frac{\pi}{4}\, l\left(\frac{1+r}{4}\right),$$

$$(119)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-r\cos 2p}{1-2r\cos 2p+r^2}\, l\sin p\, dp = \frac{\pi}{4}\, l\left(\frac{1-r}{4}\right),$$

$$(120)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-r\cos 2p}{1-2r\cos 2p+r^2}\, l\operatorname{tang} p\, dp = \frac{\pi}{4}\, l\left(\frac{1-r}{1+r}\right),$$

etc.

On trouvera, au contraire, en prenant pour r une quantité réelle dont la valeur numérique surpasse l'unité,

$$(121)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r\sin 2p}{1-2r\cos 2p+r^2}\, p\, dp = \frac{\pi}{4}\, l\left(1+\frac{1}{r}\right),$$

$$(122)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-r\cos 2p}{1-2r\cos 2p+r^2}\, (\operatorname{tang} p)^a\, dp = \frac{\pi}{4\cos\frac{a\pi}{2}}\left[1-\left(\frac{r-1}{r+1}\right)^a\right],$$

etc.

De plus, si, dans les équations (107) et (108), on pose $r=0$ ou $r=1$, $s=1$ et $x=\operatorname{tang} p$, on en déduira sans peine plusieurs

formules dignes de remarque, parmi lesquelles je citerai la suivante :

$$(123)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos p)^{a+b-2} \cos(b-a)p\, dp = \frac{\pi}{2^{a+b-1}} \frac{\Gamma(a+b-1)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}.$$

Cette dernière peut être remplacée par l'équation

$$(124)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos p)^a \cos bp\, dp = \frac{\pi}{2^{a+1}} \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma\left(\frac{a+b}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{a-b}{2}+1\right)},$$

qui subsiste, pour des valeurs réelles et même pour des valeurs imaginaires des constantes a et b, toutes les fois que l'intégrale comprise dans le premier membre ne devient pas infinie. Si, pour fixer les idées, on suppose $b = k\sqrt{-1}$, on trouvera

$$(125)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos p)^a \frac{e^{kp}+e^{-kp}}{2}\, dp = \frac{\pi\Gamma(a+1)}{2^{a+1}\mathrm{S}},$$

la valeur de S étant donnée par la formule

$$(126)\quad \mathrm{S} = \left[\int_0^\infty x^{\frac{a}{2}} e^{-x} \cos\frac{kl(x)}{2}\, dx\right]^2 + \left[\int_0^\infty x^{\frac{a}{2}} e^{-x} \sin\frac{kl(x)}{2}\, dx\right]^2.$$

Après avoir déduit des équations (103) et (104) un grand nombre de formules particulières, on pourra en établir de nouvelles à l'aide de différentiations ou d'intégrations relatives aux constantes contenues dans les premières formules. On déterminera facilement par ce moyen la valeur de l'intégrale définie

$$(127)\quad \int_0^\infty x^{a-1}\varphi(x)\,[l(x)]^n\, dx,$$

a désignant une quantité réelle ou imaginaire, $\varphi(x)$ une fraction rationnelle quelconque, et n un nombre entier. On trouvera encore

$$(128)\quad \int_0^\infty \frac{x^{a-1}-x^{b-1}}{l(x)} \frac{dx}{x^2+1} = \pi\left(l\,\mathrm{tang}\frac{a\pi}{4} - l\,\mathrm{tang}\frac{b\pi}{4}\right),$$

$$(129)\quad \int_{-\infty}^\infty \frac{x^{a-1}-x^{b-1}}{l(x)} \frac{dx}{1-x^2} = \pi\left(l\sin\frac{a\pi}{2} - l\sin\frac{b\pi}{2}\right),\ \text{etc.}$$

Lorsque la fonction $f(x+y\sqrt{-1})$ s'évanouit pour $x=\pm\infty$, quel que soit y, et pour $y=-\infty$, quel que soit x, alors, en posant

$$x_0=-\infty,\quad X=\infty,\quad y_0=-\infty,\quad Y=0,$$

on tire généralement de l'équation (88)

(130) $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=-\Delta,$$

ou, ce qui revient au même,

(131) $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)+f(-x)}{2}\,dx=-\frac{1}{2}\Delta.$$

Dans ces dernières formules, la somme représentée par Δ se compose uniquement de termes relatifs, les uns aux racines réelles de l'équation (19), les autres aux racines imaginaires dans lesquelles le coefficient de $\sqrt{-1}$ est négatif. De plus, après avoir déterminé ces différents termes à l'aide de l'équation (87), on devra réduire à moitié ceux qui correspondent à des racines réelles.

Lorsque la fonction $f(x+y\sqrt{-1})$ s'évanouit pour $y=\pm\infty$, quel que soit x, alors, en posant

$$y_0=-\infty,\quad Y=\infty,$$

on tire de la formule (88)

(132) $$\int_{-\infty}^{\infty}\left[f(X+y\sqrt{-1})-f(x_0+y\sqrt{-1})\right]dy=\frac{\Delta}{\sqrt{-1}}.$$

Dans cette dernière, Δ se compose de termes relatifs aux racines de l'équation (19) pour lesquelles les parties réelles demeurent comprises entre les limites x_0, X. Si l'on suppose en outre que la fonction $f(x+y\sqrt{-1})$ s'évanouisse pour l'une des valeurs $x=-\infty$, $x=\infty$, alors, en désignant par a une quantité positive et prenant

$$x_0=-\infty,\quad X=a,$$

ou bien

$$x_0=-a,\quad X=\infty,$$

on obtiendra l'une des formules

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(a+y\sqrt{-1})\,dy = \frac{\Delta}{\sqrt{-1}}, \tag{133}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(-a+y\sqrt{-1})\,dy = -\frac{\Delta}{\sqrt{-1}}. \tag{134}$$

Les formules (132), (133), (134) sont particulièrement utiles dans la résolution des équations par les intégrales définies, et dans l'intégration des équations différentielles linéaires (*voir* le XIXe cahier du *Journal de l'École royale Polytechnique*).

(*A suivre.*)

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Pinson (A.) et Petit (J.). — Graduations de l'alcoomètre de Gay-Lussac dans l'eau, et vérification de l'alcoomètre. — Paris, Gauthier-Villars, 1874. Grand in-8°, 47 p. 1 pl. 2 fr. 50 c.

Resal (H.). — Traité de Mécanique générale, comprenant les Leçons professées à l'École Polytechnique. T. I et II. — Paris, Gauthier-Villars, 1873-1874. In-8°. 18 fr. 50 c.

Resal (H.). — Traité de Mécanique générale, contenant les Leçons professées à l'École Polytechnique. Tome II. Du mouvement des systèmes matériels et de ses causes. Thermodynamique. — Paris, Gauthier-Villars. 1874. 1 vol. in-8°, 426 p. 9 fr. 50 c.

Ritter (A.). — Lehrbuch der technischen Mechanik. 3 Aufl. — Hannover, Rümpler. $5\frac{1}{3}$ Thlr.

Rouché (E.) et de Comberousse (Ch.). — Traité de Géométrie élémentaire. 3e édition. — Paris, Gauthier-Villars, 1874. 1 vol. in-8°, xxii-360 et xv-529 p., 611 fig. dans le texte. 12 fr.

TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME VII. — JUILLET-DÉCEMBRE 1874.

TABLE ANALYTIQUE

DES MATIÈRES.

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

RECUEILS ACADÉMIQUES ET JOURNAUX DONT LES ARTICLES ONT ÉTÉ ANALYSÉS DANS LE BULLETIN.

MÉLANGES.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

TABLE GÉNÉRALE DES MÉMOIRES ET OUVRAGES

CITÉS DANS CE VOLUME.

TABLE DES NOMS D'AUTEURS

PAR ORDRE DE MATIÈRES.

I. — HISTOIRE DES SCIENCES.— GÉNÉRALITÉS.

HISTOIRE DES SCIENCES.

PHILOSOPHIE MATHÉMATIQUE. MÉTHODES D'ENSEIGNEMENT.

II. — ARITHMÉTIQUE ET ANALYSE.

ARITHMÉTIQUE. ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE.

CALCUL INTÉGRAL. INTÉGRALES DÉFINIES.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES. CALCUL DES VARIATIONS.

FONCTIONS ELLIPTIQUES, ABÉLIENNES, BESSÉLIENNES, ETC.

III. — GÉOMÉTRIE.

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE. TRIGONOMÉTRIE.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE. PROJECTIONS. GÉOMÉTRIE APPLIQUÉE. SYSTÈMES DE MESURES.

GÉOMÉTRIE SYNTHÉTIQUE. COMPLEXES. REPRÉSENTATION DE SURFACES, ETC.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE DANS LE PLAN.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE DANS L'ESPACE.

COURBES ET SURFACES SPÉCIALES

IV. — MÉCANIQUE ET PHYSIQUE MATHÉMATIQUE.

ACOUSTIQUE.

OPTIQUE.

ÉLECTRICITÉ. MAGNÉTISME.

CHALEUR. THÉORIE DES VAPEURS.

V. — ASTRONOMIE. — PHYSIQUE DU GLOBE.

DESCRIPTION DES INSTRUMENTS.

ASTRONOMIE STELLAIRE.

PLANÈTES. SATELLITES.

PASSAGE DE VÉNUS.

COMÈTES. ÉTOILES FILANTES.

SOLEIL.

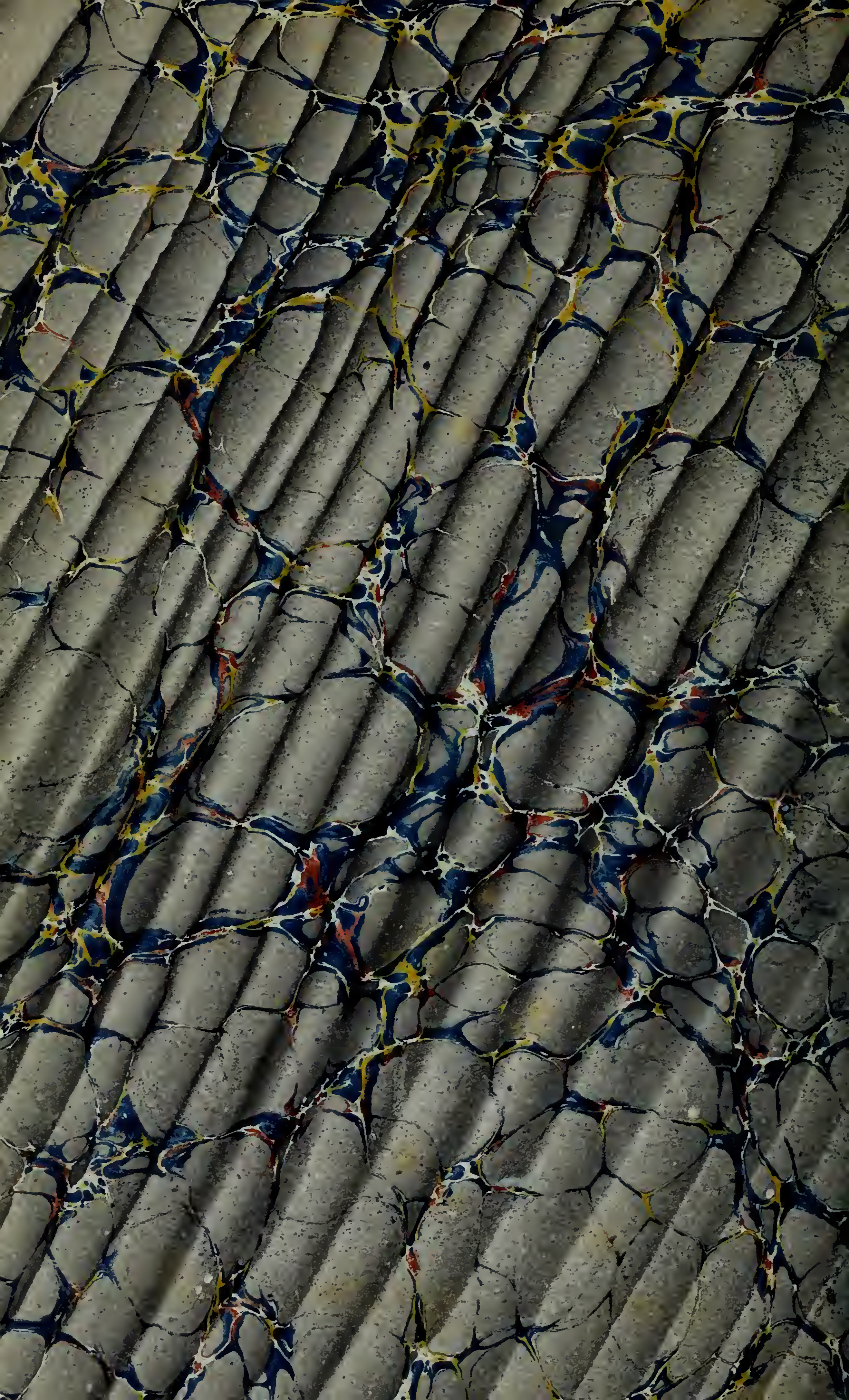
PHYSIQUE DU GLOBE. MAGNÉTISME TERRESTRE. AURORES BORÉALES.

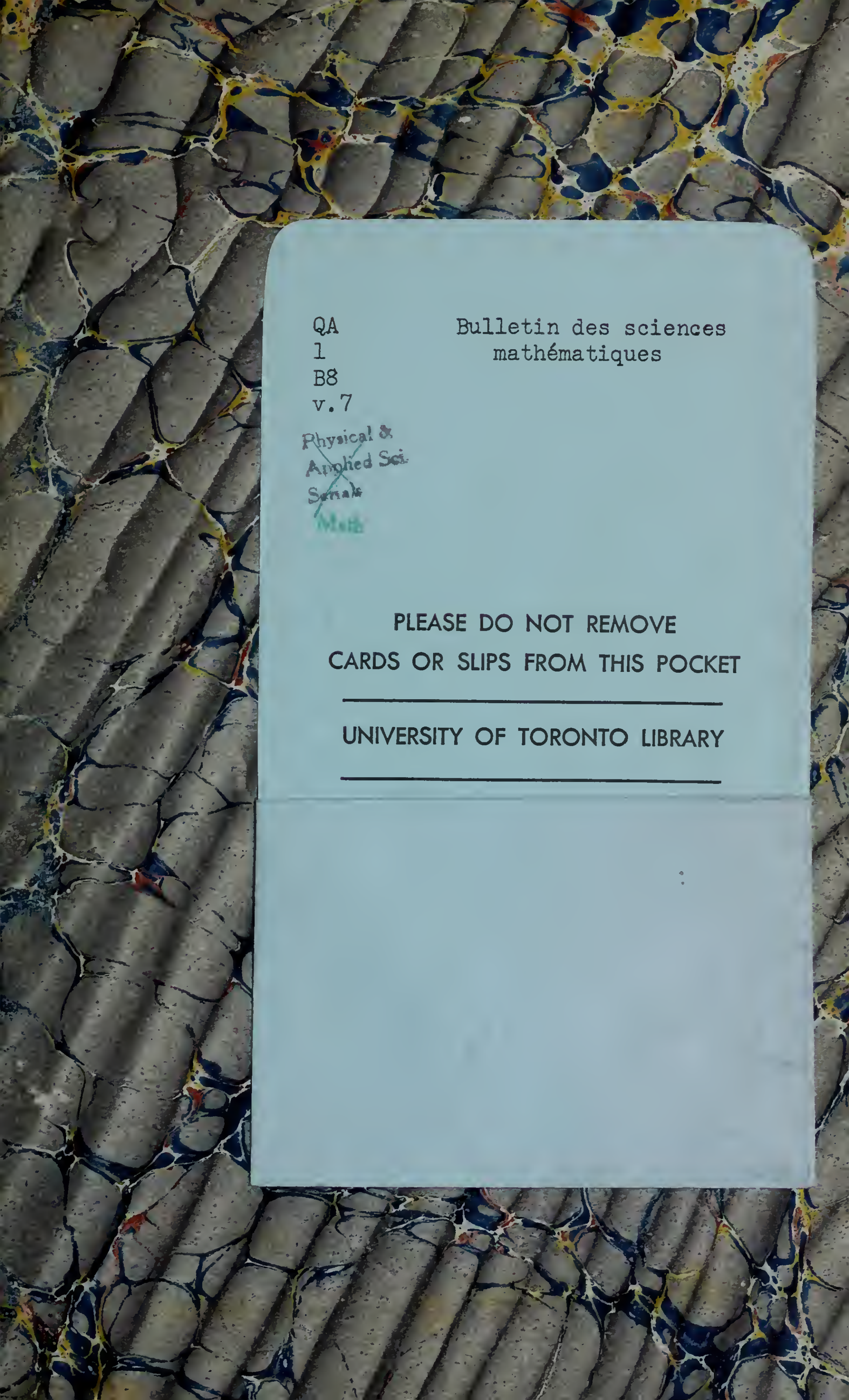
GÉODÉSIE. NAVIGATION.

CHIMIE. PHOTOGRAPHIE, ETC.

FIN DU TOME SEPTIÈME.

Paris. — Imprimerie de Gauthier-Villars, quai des Augustins, 55.





QA
1
B8
v.7
Bulletin des sciences
mathématiques
Physical &
Applied Sci.
Serials
Math
PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET
UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

